

Précession de Thomas

En 1926, Uhlenbeck et Goudsmit ont introduit la notion de spin de l'électron et montré que si l'électron possède un facteur g égal à 2 (prédit par la théorie de Dirac), alors l'effet Zeeman pouvait être expliqué, de même que l'existence de levée de dégénérescence des multiplets de niveau. En revanche, l'écart entre niveaux de la structure fine n'était que de la moitié de l'écart attendu. Une valeur $g = 1$ permettait d'obtenir la structure fine correcte, au prix d'un traitement incorrect de l'effet Zeeman. Thomas a montré en 1927 que la théorie de l'électron avec $g = 2$ permet de rendre compte correctement des deux effets. Son explication est basée sur la prise en compte d'un effet cinématique relativiste (jusqu'alors non pris en compte correctement) lorsque l'on passe du référentiel du laboratoire au référentiel propre de l'électron.

1 Précession de Larmor

1) Justifier la relation

$$\vec{\mu}_L = \frac{e}{2m} \vec{L} \quad (1)$$

entre le moment magnétique d'un électron ayant une trajectoire circulaire classique et son moment orbital.

2) On plonge un moment magnétique $\vec{\mu}$ dans un champ magnétique. Quel est son mouvement classique?

3) Précession de Larmor

On suppose que moment magnétique est un moment magnétique orbital relié au moment cinétique orbital par la relation (1). Quel est son mouvement classique? Même question au niveau quantique.

rappel: un moment magnétique plongé dans un champ magnétique est soumis à la force $\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$ (qui se réduit à $(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$ pour un champ statique sans source), dont le moment est $\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$. L'énergie correspondante est $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

2 Résonance magnétique électronique et nucléaire

Dans le modèle d'Uhlenbeck et Goudsmit, l'électron possède un moment angulaire de spin \vec{s} (qui peut prendre les valeurs quantifiées $\pm\hbar/2$ après projection sur un axe quelconque), et un moment magnétique $\vec{\mu}$ vérifiant

$$\vec{\mu}_s = \frac{ge}{2m}\vec{s} \quad (2)$$

g est appelé facteur de Landé. Dans la théorie de Dirac, $g = 2$. Cette relation généralise l'équation (1). Elle s'étend à n'importe quelle particule (élémentaire ou non) possédant un moment cinétique \vec{J} , par exemple au cas d'un nucléon possédant un moment magnétique nucléaire.

La quantité

$$\gamma = \frac{ge}{2m} \quad (3)$$

est appelée facteur gyromagnétique. La mesure directe de $\vec{\mu}_s$ pour un électron (et a fortiori pour un nucléon) est très difficile. En 1941, Rabi a imaginé une méthode résonante pour mesurer ce moment magnétique, ce qui lui a valu le prix Nobel de physique en 1944.

Considérons un atome de spin 1/2 et de facteur gyromagnétique γ , plongé dans un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 parallèle à Oz. On superpose à ce champ constant un champ magnétique tournant à la vitesse angulaire ω dans le plan xOy.

$$\vec{B}_1(t) \begin{vmatrix} B_1 \cos \omega t \\ B_1 \sin \omega t \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Le hamiltonien décrivant le couplage du moment magnétique de l'atome au champ est

$$H = -\gamma\hbar\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{B}}{2} \quad (5)$$

où $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ est le champ magnétique total. L'atome est donc décrit par le spineur $|\Psi\rangle$ solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle. \quad (6)$$

1) Construire $U(t) \in SU(2)$ tel que

$$U(t)\vec{\sigma}\cdot\vec{B}U^{-1}(t) = \vec{\sigma}\cdot\vec{B}' \quad (7)$$

où \vec{B}' est un vecteur *constant* appartenant au plan xOz.

2) Ecrire l'équation de Schrödinger satisfaite par le spineur $|\chi\rangle = U(t)|\Psi\rangle$.

3) Intégrer cette équation. En déduire que

$$|\Psi(t)\rangle = U^{-1}(t) \exp\left[-\frac{i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}t\right]|\Psi(0)\rangle \quad (8)$$

où \vec{n} est un vecteur fixe (*non unitaire*) qu'on construira explicitement.

4) L'état initial à l'instant $t = 0$ est un état propre de $S_z = \hbar \frac{\sigma_z}{2}$ de valeur propre $+\frac{\hbar}{2}$. Montrer que la probabilité $p(t)$ de *non renversement* du spin au temps t est

$$p(t) = \left| D_{1/2, 1/2}^{1/2}(V(t)) \right|^2 \quad (9)$$

où $V(t) \in SU(2)$.

5) Montrer que la probabilité de renversement du spin $q(t)$ est donnée par la formule de Rabi

$$q(t) = \frac{\omega_1^2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right)}{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (10)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -\gamma B_0 \\ \omega_1 &= -\gamma B_1 \end{aligned}$$

6) Quelle est l'interprétation physique du résultat? Etudier l'influence du champ magnétique tournant sur la probabilité de renversement.

7) Généraliser l'analyse précédente à un atome de spin j quelconque. Calculer la probabilité de non renversement du spin pour un état initial $|j, j\rangle$ complètement polarisé selon Oz.

3 Précession de Thomas

On suppose que l'électron se déplace à une vitesse \vec{v} dans les champs extérieurs \vec{E} et \vec{B} .

1) Montrer que dans la limite non relativiste, l'équation du mouvement du spin \vec{s} est, dans le référentiel dans lequel l'électron est au repos,

$$\left. \frac{d\vec{s}}{dt} \right|_{ref. de l'e^-} = \vec{\mu}_s \wedge \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} \right) \quad (11)$$

En déduire l'expression de l'énergie d'interaction du spin de l'électron avec les champs \vec{E} et \vec{B} .

2) On suppose que le champ électrique est dû au potentiel de l'atome dont l'électron fait partie. Il est supposé à symétrie sphérique (c'est vrai de façon exacte pour un atome à un électron) et on écrit donc

$$e \vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (12)$$

Montrer que l'énergie d'interaction de spin s'écrit

$$U' = -\frac{g e}{2m} \vec{s} \cdot \vec{B} + \frac{g}{2m^2 c^2} (\vec{s} \cdot \vec{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (13)$$

Cette énergie d'interaction décrit correctement l'effet Zeeman "anormal" mais possède une interaction spin-orbite deux fois trop large. L'erreur est due au fait que le référentiel lié à l'électron est un référentiel tournant. En effet, à chaque instant, pour passer du référentiel d'inertie de l'électron au référentiel du laboratoire, il faut effectuer un boost. Ces boosts diffèrent aux instants t et $t + \delta t$. Le produit de ces boosts n'est pas un boost pur mais comprend un terme de rotation pure, comme on l'a vu dans l'étude du groupe de Lorentz. Or l'équation dynamique (11) est valable à condition que l'évolution du référentiel d'inertie durant dt soit décrit par un boost pur, sans rotation.

3) Montrer, en utilisant la relation

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{K_1} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{K_2} + \vec{\omega}_{K_2/K_1} \wedge \vec{G}, \quad (14)$$

où $\vec{\omega}_{K_2/K_1}$ est la vitesse de rotation du repère K_2 par rapport au repère K_1 citée ici

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{\text{"non tournant" = ref. du lab.}} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{\text{ref. d'inertie}} + \vec{\omega}_T \wedge \vec{G} \quad (15)$$

où $\vec{\omega}_T$ est la vitesse de rotation du référentiel inertiel par rapport au référentiel du laboratoire, dite vitesse de rotation de Thomas, que l'énergie d'interaction correspondante dans le référentiel du laboratoire est

$$U = U' + \vec{s} \cdot \vec{\omega}_T \quad (16)$$

4) Pour fixer les notations, supposons qu'un référentiel K' soit obtenu à partir d'un référentiel K après un boost de vitesse relative $\vec{\beta} c$ (vitesse de K' par rapport à K mesurée dans K). On notera $\Lambda_{boost}(\vec{\beta})$ ce boost (passif). De même $R(\vec{\omega})$ symbolise une rotation passive de vitesse $\vec{\omega}$. On note $\vec{v}(t) = c \vec{\beta}$ et $\vec{v}(t + \delta t) = c(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta})$ les vitesses des référentiels d'inertie par rapport au laboratoire, respectivement aux instants t et $t + \delta t$. Soient x' et x'' les coordonnées dans le référentiel au repos de l'électron aux instants t et $t + \delta t$ (instants mesurés dans le référentiel du laboratoire). Montrer que ces coordonnées sont reliées par la transformation $x'' = \Lambda_T x'$ où

$$\Lambda_T = \Lambda_{boost}(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta}) \Lambda_{boost}(-\vec{\beta}). \quad (17)$$

5) Montrer qu'à l'ordre $\delta \vec{\beta}$,

$$\Lambda_T = \Lambda_{boost}(\Delta \vec{\beta}) R(\Delta \vec{\Omega}) \quad (18)$$

où $\Lambda_{boost}(\Delta \vec{\beta})$ est un boost infinitésimal avec

$$\Delta \vec{\beta} = \gamma^2 \delta \vec{\beta}_{\parallel} + \gamma \delta \vec{\beta}_{\perp} \quad (19)$$

et $R(\Delta\vec{\Omega})$ est une rotation infinitésimale, avec

$$\Delta\vec{\Omega} = \left(\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \right) \vec{\beta} \wedge \delta\vec{\beta}. \quad (20)$$

6) On note x''' la coordonnée dans le référentiel d'inertie *non tournant* à l'instant $t + \delta t$, qui correspond à la coordonnée x dans le référentiel du laboratoire et à la coordonnée x' dans le référentiel de l'électron à l'instant t . Ecrire l'expression de x''' en fonction de x . En déduire que la vitesse de rotation de Thomas s'écrit

$$\vec{\omega}_T = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{a} \wedge \vec{v}}{c^2}, \quad (21)$$

où \vec{a} est l'accélération dans le référentiel du laboratoire. La relation (15) permet alors de relier la variation de toute quantité dans le référentiel d'inertie de l'électron à sa variation dans le référentiel non tournant du laboratoire. On notera que dans l'équation (15), dt dans le référentiel d'inertie est bien sûr égal à $\gamma d\tau$ où τ est le temps propre.

7) En déduire que dans le cas de l'atome, le couplage spin-orbite se réduit à

$$U = -\frac{g e}{2m c} \vec{s} \cdot \vec{B} + \frac{g - 1}{2m^2 c^2} (\vec{s} \cdot \vec{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (22)$$

8) On considère à présent un noyau atomique. En première approximation, les nucléons sont alors soumis uniquement à l'interaction forte, qui est de très courte portée (quelques fm). Une bonne approximation consiste à traiter chaque nucléon comme indépendant et plongé dans un *potentiel moyen* $V_N(r)$ à symétrie sphérique attractif ayant la forme d'un puit. Par exemple, un bon modèle revient à considérer ce potentiel comme harmonique. Un tel modèle permet d'expliquer la structure en couche des noyaux et les fameux nombres magiques. Expliquer qualitativement pourquoi la levée de dégénérescence provenant du couplage spin-orbite induit par V_N est inversée par rapport au cas atomique.