Symétrie dynamique de l'atome d'hydrogène

1) <u>1ère méthode</u>: on calcule $\{\vec{M}, H\}$

On décompose $\vec{M}$ suivant $\vec{M} = m_1 \vec{r} + n_2 \vec{p} + n_3 \vec{r} \wedge \vec{p}$

<u>rappel</u>: $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$

$\vec{M} = \dfrac{\vec{p} \wedge \vec{L}}{\mu} - k\dfrac{\vec{r}}{r}$

$\vec{p} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) = p^2 \vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{p}$

donc $\vec{M} = \left(\dfrac{p^2}{\mu} - \dfrac{k}{r}\right)\vec{r} - \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\mu}\,\vec{p}$

<u>dimensions</u>: $[p] = m$
$[x] = \frac{1}{m}$

$[k] = 1 \quad [\vec{M}] = 1$

$[m_1] = m \quad [n_2] = \frac{1}{m}$

$m_1 = \dfrac{p^2}{\mu} - \dfrac{k}{r} \quad , \quad m_2 = -\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\mu} \quad , \quad n_3 = 0$

Ainsi $\{\vec{M}, H\} = m_1 \{\vec{r}, H\} + n_2 \{\vec{p}, H\} + \vec{r}\{m_1, H\} + \vec{p}\{n_2, H\}$

$\{\vec{r}, H\} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{\vec{p}}{\mu}$ et $\{\vec{p}, H\} = \dot{\vec{p}} = \mu\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{k}{r^3}\vec{r}$

(résultats que l'on peut bien entendu obtenir par calcul direct).

$\{n_1, H\} = -\left\{\dfrac{k}{r}, \dfrac{p^2}{2\mu}\right\} - \left\{\dfrac{p^2}{\mu}, \dfrac{k}{r}\right\} = -\left\{\dfrac{k}{r}, \dfrac{p^2}{2\mu} - \dfrac{p^2}{\mu}\right\} = \left\{\dfrac{k}{r}, \dfrac{p^2}{2\mu}\right\}$

$\left\{\dfrac{1}{r}, p^2\right\} = 2\vec{p}\cdot\left\{\dfrac{1}{r}, \vec{p}\right\} = 2\vec{p}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\dfrac{1}{r}\right) = 2\vec{p}\cdot\left(\dfrac{-\vec{r}}{r^3}\right) = -2\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$

donc $\{m_1, H\} = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$

(ou directement par $\left\{\frac{1}{r}, p^2\right\} = \sum_k \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} p_k^2$
$= \sum_k 2\frac{\partial}{\partial r_k}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2}}\right)p_k = -2\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$)

$\{n_2, H\} = -\dfrac{1}{2\mu^2}\{\vec{r}\cdot\vec{p}, \vec{p}^2\} + \dfrac{k}{\mu}\left\{\vec{r}\cdot\vec{p}, \dfrac{1}{r}\right\}$

$\left\{\vec{r}\cdot\vec{p}, \dfrac{1}{r}\right\} = \vec{r}\cdot\left\{\vec{p}, \dfrac{1}{r}\right\} = \vec{r}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r^3} = \dfrac{1}{r}$

$\{\vec{r}\cdot\vec{p}, \vec{p}^2\} = \vec{p}\,\{\vec{r}, \vec{p}^2\} = 2p^2$

d'où $\{m_2, H\} = -\dfrac{p^2}{\mu^2} + \dfrac{k}{\mu r}$

Ainsi $\{\vec{M}, H\} = \dfrac{p^2\vec{p}}{\mu^2} - \dfrac{k\vec{p}}{\mu r} + k\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\mu}\dfrac{\vec{r}}{r^3} - \dfrac{k}{\mu}\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}\vec{r} - \dfrac{p^2\vec{p}}{\mu^2} + \dfrac{k\vec{p}}{\mu r} = 0$

Comme $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial t} = 0$, on en déduit que $\boxed{\dfrac{d\vec{M}}{dt} = 0}$

<u>2ème méthode</u> : on calcule directement $\dot{\vec M} \equiv \frac{d\vec M}{dt}$

$$\dot{\vec M} = \dot{\vec v}\wedge\vec L + \vec v\wedge\dot{\vec L} - k\left(\frac{\vec v}{r} - \frac{\vec r}{r^2}\dot r\right) \qquad \text{or } \mu\dot{\vec v} = -\frac{\partial U}{\partial \vec r} = -k\frac{\vec r}{r^3}$$

$$\text{donc } \dot{\vec M} = -\frac{k\vec r}{\mu r^3}\wedge(\vec r\wedge\mu\dot{\vec r}) - k\left(\frac{\dot{\vec r}}{r} - \frac{\vec r}{r}\dot r\right)$$

$$= -k\vec r\,\frac{\vec r\cdot\dot{\vec r}}{r^3} + \frac{k\dot{\vec r}}{r} - \frac{k\dot{\vec r}}{r} + \frac{k\vec r}{r^2}\dot r = -k\vec r\,\frac{\vec r\cdot\dot{\vec r}}{r^3} + \frac{k\vec r}{r^2}\dot r$$

d'où, puisque $\dot r = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec r^2} = \frac{\vec r\cdot\dot{\vec r}}{r}$, $\boxed{\dot{\vec M} = 0}$

2) $\vec M\cdot\vec r = (\vec r,\vec v,\vec L) - kr = Mr\cos\theta = \vec L\cdot(\vec r\wedge\vec v) - kr = \frac{\vec L^2}{\mu} - kr$

$$\text{donc } r = \frac{\frac{\vec L^2}{\mu}}{k + M\cos\theta} = \frac{\frac{\vec L^2}{\mu k}}{1+\frac{M}{k}\cos\theta} \qquad \text{ellipse} \qquad \begin{cases} r_{max} = \dfrac{\frac{\vec L^2}{\mu k}}{1-\frac{M}{k}} = r_A \\[2ex] r_{min} = \dfrac{\frac{\vec L^2}{\mu k}}{1+\frac{M}{k}} = r_P \end{cases} \qquad e = \frac{M}{k}$$

3) $2a = r_{max} + r_{min} = \dfrac{\frac{2\vec L^2}{\mu k}}{1-e^2}$ donc $r_P = r_{min} = \dfrac{(1-e^2)a}{1+e} = (1-e)a$

d'où $\boxed{\vec L^2 = \mu k a(1-e^2)}$

$\vec M = \vec v\wedge\vec L - k\frac{\vec r}{r}$ est colinéaire au grand axe (il suffit de se placer au point P, pour lequel $\vec v\cdot\vec{MP} = 0$, et donc $\vec v\wedge\vec L$ est colinéaire à $\vec{MP}$, tout comme $-k\frac{\vec r}{r}$).

$$\vec M\cdot\vec r_P = \frac{\vec L^2}{\mu} - kr_P = ka(1-e^2) - ka(1-e) = ka(1-e)(1+e-1) = kea(1-e)$$
$$= ker_P > 0$$

Donc $\boxed{\vec M \text{ pointe vers P et } \|\vec M\| = ke}$

4) $\vec M^2 = \frac{1}{r_P^2}\left(\frac{\vec L^2}{\mu} - kr_P\right)^2 = \frac{1}{r_P^2}\left(r_P^2\frac{p_P^2}{\mu} - kr_P\right)^2 = \left(2r_P\frac{p_P^2}{2\mu} - k\right)^2 = \left(2r_P\left(\frac{p_P^2}{2\mu} - \frac{k}{r_P}\right) + k\right)^2 = (2r_PE+k)^2$

où l'on a utilisé le fait que $\vec L = \vec r\wedge\vec p = \vec{cste} = \vec r_P\wedge\vec p_P$ donc $\vec L^2 = r_P^2p_P^2$ ($\vec r_P\perp\vec p_P$)

ainsi : $E = \dfrac{\|\vec M\| - k}{2r_P} = \dfrac{k(e-1)}{2r_P}$ donc $\boxed{E = -\frac{k}{2a}}$

$\vec M^2 = 4r_P^2E^2 + 4r_PEk + k^2 = 2E(2r_P^2E + 2r_Pk) + k^2$

$2r_P(r_PE+k) = 2(1-e)a\left[(1-e)a\left(-\frac{k}{2a}\right) + k\right] = 2(1-e)a\left(\frac{k}{2} + k\frac{e}{2}\right) = (1-e^2)ka = \frac{\vec L^2}{\mu}$

d'où $\boxed{\vec M^2 = 2E\frac{\vec L^2}{\mu} + k^2}$

$\boxed{\vec M\cdot\vec L = 0}$ d'après l'expression $\vec M = \vec v\wedge\vec L - k\frac{\vec r}{r}$ et le fait que $\vec r\cdot\vec L = 0$, ou encore du fait que $\vec M$ est colinéaire à $\vec{MP}$

$\underline{\text{directement}}$: $\vec M = \vec v \wedge \vec L - k\frac{\vec r}{r} = \left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)\vec r - \frac{\vec r\cdot\vec p}{\mu}\,\vec p$

$\vec M^2 = \left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)^2 r^2 + \frac{(\vec r\cdot\vec p)^2}{\mu^2}p^2 - \frac{2(\vec r\cdot\vec p)^2}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)$.

Or $\vec L^2 + (\vec r\cdot\vec p)^2 = r^2p^2$ (car $\vec L = \vec r\wedge\vec p$) donc $(\vec r\cdot\vec p)^2 = r^2p^2 - \vec L^2$

d'où $\vec M^2 = \frac{p^4}{\mu^2}r^2 - 2k\frac{p^2 r}{\mu} + k^2 + \frac{r^2p^4}{\mu^2} - \vec L^2\frac{p^2}{\mu^2} - \frac{2r^2p^2}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) + \frac{2\vec L^2}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) = \frac{2\vec L^2}{\mu}\left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r}\right) +$

5) a) $\boxed{\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}L_k}$ (voir notes annexe 13-2)

b) $\{L_i, M_j\} = \{\vec M \wedge \vec u_i\}_j$ en utilisant le résultat $\{\vec J, \vec L\cdot\vec n\} = \vec n \wedge \vec J$

(voir notes annexes 13-4)

donc $\{L_i, M_j\} = \varepsilon_{jkk'}M_k\delta_{ik'} = \boxed{\varepsilon_{ijk}M_k = \{L_i, M_j\}}$

c) $\{M_i, M_j\} = \left\{\frac{(\vec p\wedge\vec L)_i}{\mu} - k\frac{r_i}{r}, M_j\right\} = \left(\frac{\vec p}{\mu}\wedge\{\vec L, M_j\}\right)_i - \left(\frac{\vec L}{\mu}\wedge\{\vec p, M_j\}\right)_i - k\left\{\frac{\vec r}{r}, M_j\right\}_i$

• $\left(\frac{\vec p}{\mu}\wedge\{\vec L, M_j\}\right)_i = \varepsilon_{ij'k'}\frac{p_{j'}}{\mu}\underbrace{\{L_{k'}, M_j\}}_{\varepsilon_{k'jk}M_k} = \frac{\delta_{ij}}{\mu}\sum_{k,k'}\varepsilon^2_{ikk'}p_kM_k + \frac{1}{\mu}\sum_{k'}\varepsilon_{ijk'}\varepsilon_{k'ji}p_jM_i$

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} i=j \\ j'\neq k\end{array}\right.$ ou $\left|\begin{array}{l} i=k \\ j'=j\end{array}\right.$

$= \delta_{ij}\left(\frac{\vec p\cdot\vec M}{\mu} - \frac{p_iM_i}{\mu}\right) - (1-\delta_{ij})\frac{p_jM_i}{\mu} = \delta_{ij}\frac{\vec p\cdot\vec M}{\mu} - \frac{p_jM_i}{\mu}$

• $\left\{\frac{\vec r}{r}, M_j\right\}_i = \left\{\frac{r_i}{r}, M_1r_j + M_2p_j\right\} = \left\{\frac{r_i}{r}, M_1\right\}r_j + \left\{\frac{r_i}{r}, M_2\right\} + M_2\left\{\frac{r_i}{r}, p_j\right\}$ rappel : $M = \underbrace{\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)}_{M_1}\vec r - \underbrace{\frac{\vec r\cdot\vec p}{\mu}}_{M_2}\vec p$

$\left\{\frac{r_i}{r}, \frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right\} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{r_i}{r}, p^2\right\} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\{r_i, p^2\}}_{2p_i} + r_i\left\{\frac{1}{r}, p^2\right\}\right] = \frac{1}{\mu}\left[\frac{2p_i}{r} - 2\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}r_i\right]$

$\left\{\frac{r_i}{r}, p_j\right\} = \frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{r_i}{r}\right) = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{r_ir_j}{r^3}$ donc $\left\{\frac{r_i}{r}, \vec r\cdot\vec p\right\} = \frac{r_i}{r} - \frac{r_i}{r} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{r_i}{r}, M_2\right\} = 0$

Ainsi $\left\{\frac{r_i}{r}, M_j\right\} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{2r_jp_i}{r} - 2\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}r_ir_j - \frac{\vec r\cdot\vec p}{r}\delta_{ij} + \frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}r_ir_j\right]$

• $\{\vec p, \vec M\} = \{\vec p, M_1\}\vec r + M_1\{\vec p, \vec r\} + \{\vec p, M_2\}\vec p$ $\quad\{\vec p, M_1\} = -\frac{\partial M_1}{\partial\vec r} = -k\frac{\vec r}{r^3}$

$\{\vec p, M_2\} = -\frac{\partial M_2}{\partial\vec r} = \frac{\vec p}{\mu}$

donc $\{p_k, M_j\} = -\frac{k}{r^3}r_kr_j - \left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)\delta_{kj} + \frac{p_kp_j}{\mu}$

• $\left(\frac{\vec L}{\mu}\wedge\{\vec p, M_j\}\right)_i = -\frac{k}{\mu r^3}(\vec L\wedge\vec r)_ir_j + \frac{\vec L}{\mu^2}\wedge\vec p\,p_j \underbrace{- \frac{1}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)\underbrace{\varepsilon_{ik'k}L_{k'}\delta_{kj}}_{\varepsilon_{ikj}L_k}}_{\frac{1}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)\varepsilon_{ijk}L_k}$

$$\vec{L} \wedge \vec{r} = (\vec{r} \wedge \vec{p}) \wedge \vec{r} = -\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{p}) = -(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r} + r^2 \vec{p}$$

$$\vec{L} \wedge \vec{p} = (\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{p} - p^2 \vec{r}$$

donc $\left(\frac{\vec{L}}{r} \wedge \{\vec{p}, \Lambda_j\} \right)_i = \frac{k}{\mu r^3} (\vec{r}\cdot\vec{p})\, r_i r_j - \frac{k}{\mu r} p_i r_j + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\mu^2} p_i p_j - \frac{p^2}{\mu^2} r_i p_j$

$$+ \frac{1}{\mu}\left(2\frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\{\Lambda_i, \Lambda_j\} = \cancel{\frac{-r_i p_j}{\mu^2} p^2} + \frac{k}{\mu r} r_i p_j + \cancel{\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\mu^2} p_i p_j} - \cancel{\frac{k}{r}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r}\delta_{ij}}$$

$$\cancel{-\frac{k}{\mu r^3}(\vec{r}\cdot\vec{p}) r_i r_j} + \frac{k}{\mu r} p_i r_j - \cancel{\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\mu^2} p_i p_j} + \cancel{\frac{p^2}{\mu^2} r_i p_j} - \frac{1}{\mu}\left(2\frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$-\frac{k}{\mu} \frac{2 r_j p_i}{r} + \cancel{\frac{k}{\mu}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} r_i r_j} + \cancel{\frac{k}{\mu}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r}\delta_{ij}}$$

$$= +\frac{k}{\mu r}(r_i p_j - r_j p_i) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{2p^2}{2\mu} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijk} L_k$$

or $L_k = \varepsilon_{i'j'k}\, r_{i'} p_{j'}$

$$\varepsilon_{ijk} L_k = \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{i'j'k}\, r_{i'} p_{j'} = r_i p_j - r_j p_i$$

donc $\{\Lambda_i, \Lambda_j\} = -\frac{2}{\mu}\left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r} \right) \varepsilon_{ijk} L_k = \boxed{-\frac{2H}{\mu} \varepsilon_{ijk} L_k = \{M_i, M_j\}}$

d) $\underbrace{\{H, L_i\}}_{} = \underbrace{\{H, \Lambda_j\}}_{} = 0$

standard: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{p}}_{0} + \underbrace{\vec{r} \wedge \dot{\vec{p}}}_{\sim \vec{r} \,\to\, 0} = 0$ déjà démontré

et $\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = 0$ donc $\{H, L_i\} = 0$

6) $\vec{M}$ est un vecteur, qui se transforme comme un vecteur(!) sous l'action de $SO(3)$: en effet on vient de montrer que $\{L_i, \Lambda_j\} = \varepsilon_{ijk} \Lambda_k$

7) $\{H, \Lambda_i\} = \{H, L_i\} = 0$ donc on peut se placer dans les sous-espaces où E est fixée.

* $E < 0$

$$\vec{n}' = \sqrt{\frac{-r}{2E}}\,\vec{n}$$

$$\{n'_i, n'_j\} = \varepsilon_{ijk} L'_k \qquad \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\{L_i, n'_j\} = \varepsilon_{ijk} n'_k$$

algèbre de Lie de $SO(4)$

* $E > 0$

$$\vec{n}' = \sqrt{\frac{r}{2E}}\,\vec{n}$$

$$\{n'_i, n'_j\} = -\varepsilon_{ijk} L_k \qquad \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\{L_i, n'_j\} = \varepsilon_{ijk} n'_k$$

algèbre de Lie de $SO(3,1)$

cf: groupe de Lorentz et son algèbre de Lie : $\Lambda = e^{i\vec{\phi}\cdot\vec{K}}$ boost (actif) pur

$\Lambda = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{J}}$ rotation (active)

$$\begin{cases} [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k \end{cases}$$

traitement quantique

rem : $\vec{n} = \frac{1}{2\mu}\left(\vec{p}\wedge\vec{L} - \vec{L}\wedge\vec{p}\right) - k\frac{\vec{r}}{r}$ $\qquad n_k = \frac{1}{2\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\, p_i L_j - \varepsilon_{ijk}\, L_i p_j\right) - k\frac{r_k}{r}$

$$n_k^+ = \frac{1}{2\mu}\left(\varepsilon_{ijk} L_j^+ p_i^+ - \varepsilon_{ijk} p_j^+ L_i^+\right) - k\left(\frac{r_k}{r}\right)^+ = \frac{1}{2\mu}\left(-\varepsilon_{jik} L_j p_i + \varepsilon_{jik} p_j L_i\right) - k\frac{r_k}{r}$$

$$= \left[\frac{1}{2\mu}\left(-\vec{L}\wedge\vec{p} + \vec{p}\wedge\vec{L}\right) - k\frac{\vec{r}}{r}\right]_k = n_k$$

donc $\vec{n}$ est hermitique

8) $n_k = \frac{1}{2\mu}\left(\vec{p}\wedge(\vec{r}\wedge\vec{p}) - (\vec{r}\wedge\vec{p})\wedge\vec{p}\right)_k - k\frac{r_k}{r}$

or $\left[\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})\right]_k = a_i b_k c_i - a_i b_i c_k$ $\quad$ et $\left[(\vec{b}\wedge\vec{c})\wedge\vec{a}\right]_k = -b_k c_i a_i + b_i c_k a_i$

donc $n_k = \frac{1}{2\mu}\left(p_i r_k p_i - (\vec{p}\cdot\vec{r})p_k + r_k p_i p_i - r_i p_k p_i\right) - k\frac{r_k}{r}$

or $p_i r_k p_i = r_k p_i p_i + [p_i, r_k]\, p_i = r_k p_i^2 - i\hbar p_k$

$r_i p_k p_i = p_i r_i p_k + [r_i, p_i]\, p_k = p_i r_i p_k + 3i\hbar p_k$

Donc $n_k = \frac{1}{2\mu}\left(2 r_k p_i^2 - 2 p_i r_i p_k - 4i\hbar p_k\right) - k\frac{r_k}{r} = \frac{1}{\mu}\left(r_k p_i^2 - p_i r_i p_k\right) - \frac{2}{\mu} i\hbar p_k - k\frac{r_k}{r}$

$$[n_k, H] = \left[\frac{1}{\mu} r_k p^2 - \frac{1}{\mu} p_i r_i p_k - \frac{2}{\mu} i\hbar p_k - k\frac{r_k}{r}\,,\ \frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r}\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu^2}[r_k, p^2]\, p^2 - \frac{p_i}{2\mu^2}[r_i, p^2]\, p_k - \frac{k}{2\mu}\left[\frac{r_k}{r}, p^2\right] - \frac{k}{\mu} r_k \left[p^2, \frac{1}{r}\right]$$

$$+ \frac{k}{\mu}\left[p_i r_i p_k, \frac{1}{r}\right] + \frac{k}{\mu} 2i\hbar \left[p_k, \frac{1}{r}\right]$$

$[r_k, p^2] = 2i\hbar p_k$ $\qquad [p_k, \frac{1}{r}] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r_k}\left(\frac{1}{r}\right) = i\hbar\frac{r_k}{r^3}$

$[p^2, f(r)] = p_i[p_i, f(r)] + [p_i, f(r)]\, p_i = -i\hbar\left(p_i \frac{\partial}{\partial r_i} f(r) + \frac{\partial}{\partial r_i} f(r)\, p_i\right)$

donc $\left[p^2, \frac{r_k}{r}\right] = -i\hbar\left(p_i \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_k}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_k}{r}\right) p_i\right) = -i\hbar p_k \frac{1}{r} + i\hbar\, p_i \frac{r_i r_k}{r^3} - i\hbar \frac{1}{r} p_k + i\hbar \frac{r_i r_k p_i}{r^3}$

$\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_k}{r}\right) = \frac{\delta_{ki}}{r} - \frac{r_i}{r^3} r_k$

$\left[p^2, \frac{1}{r}\right] = -i\hbar\left(p_i \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r}\right) p_i\right) = -i\hbar\left(-p_i\frac{r_i}{r^3} - \frac{r_i}{r^3} p_i\right) = i\hbar\left(p_i \frac{r_i}{r^3} + \frac{r_i}{r^3} p_i\right)$

$\left[p_i r_i p_k, \frac{1}{r}\right] = p_i r_i p_k \frac{1}{r} - \frac{1}{r} p_i r_i p_k = p_i r_i p_k \frac{1}{r} - p_i r_i \frac{1}{r} p_k + p_i r_i \frac{1}{r} p_k - \frac{1}{r} p_i r_i p_k$

$= p_i r_i \left[p_k, \frac{1}{r}\right] + \left[p_i, \frac{1}{r}\right] r_i p_k$

$$= i\hbar\, p_i \frac{r_i r_k}{r^3} + i\hbar \underbrace{\frac{r_i r_i}{r^3}}^{\frac{1}{r}} p_k$$

Au total $[M_k, H] = \frac{1}{2\mu^2}\, 2i\hbar \underbrace{(p_k p^2 - \overbrace{p_i p_i}^{p^2} p_k)}_{0} - \frac{\hbar}{2\mu} i\hbar\, p_k \frac{1}{r} + \frac{\hbar}{2\mu} i\hbar\, p_i \frac{r_i r_k}{r^3}$

$- \frac{\hbar}{2\mu} i\hbar \frac{1}{r} p_k + \frac{\hbar}{2\mu} i\hbar \frac{r_i r_k}{r^3} p_i - \frac{\hbar}{\mu} i\hbar\, r_k\, p_i \frac{r_i}{r^3} - \frac{\hbar}{\mu} i\hbar\, r_k \frac{r_i}{r^3} p_i + \frac{\hbar}{\mu} i\hbar\, p_i \frac{r_i r_k}{r^3} + \frac{\hbar}{\mu} i\hbar \frac{1}{r} p_k$

$+ \frac{\hbar}{\mu} 2i\hbar [p_k, \frac{1}{r}]$

$= -\frac{\hbar}{2\mu} i\hbar [p_k, \frac{1}{r}] + \frac{\hbar}{\mu} 2i\hbar [p_k, \frac{1}{r}] + \frac{\hbar}{\mu} i\hbar \frac{3}{2} p_i \frac{r_i r_k}{r^3} - \frac{\hbar}{2\mu} i\hbar \frac{r_i r_k}{r^3} p_i - \frac{\hbar}{\mu} i\hbar\, r_k p_i \frac{r_i}{r^3}$

or $[p_i, \frac{r_k}{r^3}] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{r_k}{r^3}\right) = -i\hbar \frac{\delta_{ik}}{r^3} - i\hbar\, r_k \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{r^3}}_{\frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{3 r_i}{r^5}}$

$= -i\hbar \left(\frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3 r_i r_k}{r^5}\right)$

donc $[p_i, \frac{r_i}{r^3}] = -i\hbar \left(\frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}\right) = 0$

Ainsi $[M_k, H] = \frac{\hbar}{\mu} \frac{3}{2} i\hbar \underbrace{[p_k, \frac{1}{r}]}_{i\hbar \frac{r_k}{r^3}} + \underbrace{\frac{\hbar}{\mu} i\hbar \frac{3}{2} \frac{r_i}{r^3} \underbrace{p_i r_k}_{r_k p_i - i\hbar \delta_{ki}}}_{\frac{\hbar}{\mu}\frac{3}{2} i\hbar \frac{r_i r_k}{r^3} p_i - \frac{\hbar}{\mu}\frac{3}{2} (i\hbar)^2 \frac{r_k}{r^3}} - \frac{\hbar}{2\mu} i\hbar \frac{r_i r_k}{r^3} p_i - \frac{\hbar}{\mu} i\hbar \frac{r_i r_k}{r^3} p_i$

$= 0$

$\| [M_k, H] = 0$

g) $\vec{L} \cdot \vec{M} = \frac{1}{2\mu} \vec{L} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{L} \wedge \vec{p}) - \hbar\, \vec{L} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 0$ de façon évidente

calcul (inutile) : $L_k = \varepsilon_{ijk} r_i p_j$ donc $L_k p_k = \varepsilon_{ijk} r_i p_j p_k = 0$ $(\varepsilon_{ijk} p_j p_k = 0)$

$L_k r_k = \varepsilon_{ijk} r_i p_j r_k = \underbrace{\varepsilon_{ijk} r_i r_k p_j}_{0} - i\hbar \underbrace{\varepsilon_{ikk}}_{0} r_i = 0$

$\rightarrow \vec{L} \cdot \vec{r} = 0$ et $\vec{L} \cdot \vec{p} = 0$

$M_k = \frac{1}{\mu}(r_k p^2 - p_i r_i p_k) - \frac{2}{\mu} i\hbar\, p_k - \hbar \frac{r_k}{r}$ donc il suffit de montrer que $L_k p_i r_i p_k = 0$

or $L_k p_n r_n p_k = \varepsilon_{ijk} r_i p_j \underbrace{p_n r_n p_k}_{p_k p_n r_n + i\hbar p_k} = \varepsilon_{ijk} r_i \underbrace{p_j p_k}_{sym \to 0} p^2 + i\hbar\, \underbrace{\varepsilon_{ijk} r_i p_j p_k}_{idem}$

Ainsi $\boxed{\vec{L}\cdot\vec{\Lambda} = 0}$

preuve identique pour $\boxed{\vec{\Lambda}\cdot\vec{L} = 0}$

<u>Calcul de $\vec{\Lambda}^2$:</u> (même méthode que dans le cas classique)

$$\vec{L}^2 = \varepsilon_{ijk} r_i p_j \varepsilon_{i'j'k} r_{i'} p_{j'} = r_i p_j r_i p_j - r_i p_j r_j p_i = r_i r_i p_j p_j - i\hbar r_i p_i - r_i r_j p_j p_i + 3i\hbar r_i p_i$$

car $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i'j'k} = \delta_{ii'}\delta_{jj'} - \delta_{ij'}\delta_{ji'}$

$$= r^2 p^2 - \underbrace{r_i r_j p_j p_i}_{r} + 2i\hbar r_i p_i$$

donc $\vec{L}^2 + (\vec{r}\cdot\vec{p})^2 = r^2 p^2 - \cancel{r_i r_j p_j p_i} + 2i\hbar r_i p_i + \underbrace{r_i p_i r_j p_j}_{\cancel{r_i r_j p_i p_j} - i\hbar r_i p_i}$

d'où $(\vec{r}\cdot\vec{p})^2 = r^2 p^2 - \vec{L}^2 + i\hbar\, \vec{r}\cdot\vec{p}$

$$M_k = r_k\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) - \frac{1}{\mu}(\vec{p}\cdot\vec{r})\, p_k - \frac{2i\hbar}{\mu} p_k$$

$$\Lambda^2 = r_k\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) r_k\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{\mu}\right) + \frac{1}{\mu^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\, p_k (\vec{p}\cdot\vec{r})\, p_k + \frac{4(i\hbar)^2}{\mu^2} p^2 - \frac{2i\hbar}{\mu}(\vec{p}\cdot\vec{r})\cancel{\left(\frac{p^2}{\mu}-\frac{k}{r}\right)}$$

$$- \frac{2i\hbar}{\mu} r_k\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) p_k + \cancel{\frac{2i\hbar}{\mu^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\, p^2} + \frac{2i\hbar}{\mu^2} p_k (\vec{p}\cdot\vec{r})\, p_k - \frac{1}{\mu}(\vec{p}\cdot\vec{r})^2\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) - \frac{r_k}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)(\vec{p}\cdot\vec{r})\, p_k$$

$[r_k, p^2] = 2i\hbar\, p_k \qquad \left[p_k, \frac{1}{r}\right] = i\hbar \frac{r_k}{r^3}$

$$\vec{\Lambda}^2 = r^2\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)^2 - 2i\hbar \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) + \frac{1}{\mu^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})^2 p^2 - \frac{i\hbar}{\mu^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\, p^2 + \frac{4(i\hbar)^2}{\mu^2} p^2 + 2i\hbar \frac{k}{\mu}(\vec{p}\cdot\vec{r})\frac{1}{r}$$

$$- \frac{2i\hbar}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) - 2(i\hbar)^2 \frac{k}{\mu}\frac{1}{r} + \frac{2i\hbar}{\mu^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\, p^2 - \frac{2(i\hbar)^2}{\mu^2} p^2 - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})^2}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)$$

$$- \frac{1}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})^2\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) + \frac{4i\hbar}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)$$

car $-\frac{r_k}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)(\vec{p}\cdot\vec{r})\, p_k = -\frac{r_k}{\mu}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) p_k (\vec{p}\cdot\vec{r}) - \frac{i\hbar}{\mu} r_k\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) p_k$

$$= -\frac{1}{\mu}\vec{r}\cdot\vec{p}\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \frac{i\hbar}{\mu}\frac{k}{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \frac{i\hbar}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) - \frac{(i\hbar)^2}{\mu}\frac{k}{r}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})(\vec{p}\cdot\vec{r})\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)}_{-\frac{1}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})^2\left(\frac{p^2}{\mu}-\frac{k}{r}\right) + \frac{3i\hbar}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})\left(\frac{p^2}{\mu}-\frac{k}{r}\right)} + \frac{2i\hbar}{\mu^2}(\vec{r}\cdot\vec{p})\, p^2 - \frac{k\, i\hbar}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})\frac{1}{r} \underbrace{- \frac{i\hbar}{\mu}\frac{k}{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})}_{-\frac{i\hbar}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})\frac{k}{r} + \cancel{\frac{(i\hbar)^2}{\mu}\frac{k}{r}}} + 3\frac{(i\hbar)^2}{\mu}\frac{k}{r}$$

$\vec{p}\cdot\vec{r} = \vec{r}\cdot\vec{p} - 3i\hbar$

$(\vec{p}\cdot\vec{r})^2 = (\vec{r}\cdot\vec{p})^2 - 6i\hbar\, \vec{r}\cdot\vec{p} - 9\hbar^2$

$$-\frac{i\hbar}{\mu}(\vec{r}\cdot\vec{p})\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) - \cancel{\frac{(i\hbar)^2}{\mu}\frac{k}{r}}$$

$$\vec{M}^2 = r^2\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right)^2 - 2ik\,\frac{\vec r\cdot\vec p}{\mu}\left(\cancel{\frac{p^2}{\mu}} - \cancel{\frac{k}{r}}\right) + \frac{1}{\mu^2}(\vec r\cdot\vec p)^2 p^2 - \frac{6ik}{\mu^2}(\vec r\cdot\vec p)p^2 + \cancel{\frac{9(ik)^2}{\mu^2}}p^2$$

$$+\frac{ik}{\mu^2}(\vec r\cdot\vec p)p^2 - \frac{3(ik)^2}{\mu^2}p^2 + \frac{4(ik)^2}{\mu^2}p^2 + 2ik\frac{k}{\mu}(\vec r\cdot\vec p)\frac{1}{r} - 6(ik)^2\frac{k}{\mu}\frac{1}{r} - \frac{2ik}{\mu}(\vec r\cdot\vec p)\left(\cancel{\frac{p^2}{\mu}} - \cancel{\frac{k}{r}}\right)$$

$$-2(ik)^2\frac{k}{\mu}\frac{1}{r} - \frac{2(ik)^2}{\mu^2}p^2 - \frac{2}{\mu}(\vec r\cdot\vec p)^2\left(\frac{p^2}{\mu} - \frac{k}{r}\right) + \frac{6ik}{\mu}(\vec r\cdot\vec p)\left(\cancel{\frac{p^2}{\mu}} - \frac{k}{r}\right) - \frac{9(ik)^2}{\mu}\left(\cancel{\frac{p^2}{\mu}} - \frac{k}{r}\right)$$

$$+\frac{4ik}{\mu}(\vec r\cdot\vec p)\left(\cancel{\frac{p^2}{\mu}} - \cancel{\frac{k}{r}}\right)$$

$$+r^2\frac{p^2}{\mu}\frac{k}{r}$$

$$= \left(-2\frac{r^2p^2}{\mu} + \frac{2\vec L^2}{\mu} - 2ik\frac{\vec r\cdot\vec p}{\mu}\right)\left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r}\right) + r^2\frac{p^4}{\mu^2} - r^2\frac{p^2}{\mu}\frac{k}{r} - k\,r\frac{p^2}{\mu} + k^2$$

$$+\frac{ik}{\mu^2}(\vec r\cdot\vec p)p^2 + \frac{k^2}{\mu^2}p^2 - \frac{k^2}{\mu}\frac{k}{r} - \frac{4ikk}{\mu}(\vec r\cdot\vec p)\frac{1}{r} \qquad \underbrace{}_{}\; -\frac{4(ik)^2}{r}$$

$$[r, p^2] = ik\left(p_i\frac{\partial}{\partial x_i}r + \frac{\partial}{\partial x_i}r\,p_i\right) = ik\left(\vec p\cdot\frac{\vec r}{r} + \frac{1}{r}\vec r\cdot\vec p\right) = ik\,\vec r\cdot\vec p\,\frac{1}{r} - \frac{3(ik)^2}{r} - \frac{(ik)^2}{r} + ik(\vec r\cdot\vec p)\frac{1}{r}$$

$$[r^2, p^2] = ik\left(p_i\frac{\partial}{\partial x_i}r^2 + \frac{\partial}{\partial x_i}r^2\,p_i\right) = ik\,2(\vec p\cdot\vec r + \vec r\cdot\vec p) = 2ik(2\vec r\cdot\vec p - 3ik) = 4ik\,\vec r\cdot\vec p - 6ik$$

$$= 2\frac{\vec L^2}{\mu}H - \cancel{\frac{r^2p^4}{\mu}} + \cancel{\frac{2k\,r^2p^2}{\mu}\frac{1}{r}} - \cancel{\frac{ik}{\mu^2}(\vec r\cdot\vec p)p^2} + \cancel{\frac{2ik\,k}{\mu}\vec r\cdot\vec p\,\frac{1}{r}} + \cancel{\frac{r^2p^4}{\mu^2}} + \cancel{k\frac{p^2}{\mu}r} - \cancel{k\frac{p^2}{\mu}r} + k^2$$

$$+\cancel{\frac{k}{\mu}\,ik\,4\vec r\cdot\vec p\frac{1}{r}} - \frac{k}{\mu}\frac{6(ik)^2}{r} - \cancel{\frac{k}{\mu}ik(\vec r\cdot\vec p)\frac{1}{r}} + \frac{k}{\mu}\frac{4(ik)^2}{r} - \cancel{\frac{k}{\mu}ik(\vec r\cdot\vec p)\frac{1}{r}}$$

$$+\cancel{\frac{ik}{\mu^2}(\vec r\cdot\vec p)p^2} + \frac{k^2}{\mu^2}p^2 - \frac{k^2}{\mu}\frac{k}{r} - \cancel{4\frac{ik\,k}{\mu}(\vec r\cdot\vec p)\frac{1}{r}}$$

$$\vec M^2 = 2\frac{\vec L^2}{\mu}H + \frac{2k^2}{\mu}\left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r}\right) + k^2 \qquad \text{c.q.f.d}$$

$$\boxed{\vec M^2 = \frac{2H}{\mu}\left(\vec L^2 + k^2\right) + k^2}$$

$(\text{car } [H, \vec L] = 0)$

10) $[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$

$[L_i, M_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} M_k$

$[M_i, M_j] = -i\hbar \frac{2H}{\mu} \varepsilon_{ijk} L_k$

11) $\vec{n}$ se transforme comme un vecteur sous $SO(3)$

Le résultat 7) reste vrai

12) $E<0$: on pose $\begin{cases} A_i = \frac{1}{2}(L_i + n'_i) \\ B_i = \frac{1}{2}(L_i - n'_i) \end{cases}$ $n_i = n'_i \sqrt{\frac{-2E}{\mu}}$

Alors $[A_i, A_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} A_k$ (1)

$[B_i, B_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} B_k$ (2)

$[A_i, B_j] = 0$ $SU(2)\times SU(2)$

représentations irréductibles : caractérisées par j_1 (pour (1)) tq $\vec{A}^2 = j_1(j_1+1)\hbar^2$

j_2 (pour (2)) : $\vec{B}^2 = j_2(j_2+1)\hbar^2$

13) $\vec{n}\cdot\vec{L} = 0$ s'écrit $(\vec{A}+\vec{B})(\vec{A}-\vec{B}) = 0$ soit, puisque $[A_i, B_j] = 0$,

$\vec{A}^2 = \vec{B}^2$

Donc $\| j_1 = j_2 = j$

14) Comme $\vec{M}^2 = \frac{2H}{\mu}(\vec{L}^2 + \hbar^2) + k^2$,

on a, en fonction de A_i et B_i : $\left(A_i - B_i = \sqrt{\frac{-\mu}{2E}}\, M_i \right.$ et $\left. A_i + B_i = L_i \right)$:

$$-\frac{2E}{\mu}(A_i - B_i)^2 - k^2 = \frac{2E}{\mu}\left[(A_i+B_i)^2 + \hbar^2\right]$$

soit $$-\frac{4E}{\mu}(A_i^2 + B_i^2) - \frac{2E\hbar^2}{\mu} = k^2$$

d'où $$-\frac{2E}{\mu}\hbar^2\left(2\left[j(j+1) + j(j+1)\right] + 1\right) = k^2$$

$$\left\| \; E = \frac{-k^2\mu}{2(2j+1)^2\hbar^2} \right. \qquad j = 0, \tfrac{1}{2}, \ldots$$ en accord avec

$\Rightarrow$ dégénérescence de chaque niveau $= (2j+1)^2$

$$\boxed{\begin{array}{c} E = -\dfrac{E_I}{n^2} \\ E_I = \dfrac{\mu k^2}{2\hbar^2} \quad \text{dégénérescence } n^2 \\ n : \text{nombre quantique principal} \end{array}}$$

15) $\vec{L} = \vec{A} + \vec{B}$

$\vec{L}^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$

$\ell \in \{|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2\} = \{0, \dots, 2j\}$ donc ℓ est bien entier.

Dégénérescence totale $= \sum_{\ell=0}^{2j} (2\ell+1) = (2j+1)^2$, qui est bien identique au résultat de la question 14).

16) $\vec{L}$ est un vecteur axial (inv. sous P)

$\vec{M}$ est un vecteur polaire (change sous P)

$\left.\begin{array}{l} \vec{L} \\ \vec{M} \end{array}\right\}$ quantités conservées

Les états, caractérisés par les générateurs $\vec{L}$ et $\vec{M}$, n'ont donc pas forcément une parité bien définie. Effectivement, des états de nombre quantique ℓ pair et impair (parité opposée) sont dégénérés.