M2/CFP/Parcours de Physique Théorique

Invariances en physique et théorie des groupes

Groupes et algèbres de Lie de dimension 3

1. Rappeler la définition du groupe SU(1,1).

2. a) Quelle équation définit son algèbre de Lie ?

b) Quelle conséquence cela implique-t-il sur les éléments de matrices de $X \in$ su(1,1) ?

c) Montrer qu'on peut écrire une base de su(1,1) en termes des 3 matrices de Pauli et en calculer les relations de commutation.

d) Cette algèbre est-elle isomorphe à l'algèbre de so(3) ?

3. On considère maintenant le groupe linéaire réel SL(2,R).

a) Quelle est sa définition ?

b) Comment son algèbre de Lie est-elle définie ? En donner une base en termes de matrices de Pauli.

4. Montrer l'isomorphisme des deux algèbres su(1,1) et sl(2,R).

5. Mêmes questions avec l'algèbre so(2,1) : définition, dimension, relations de commutation, isomorphisme avec l'une des précédente ?

6. En utilisant les critères de Cartan, discuter la semi-simplicité et la compacité de ces différentes algèbres.

(Pour la relation géométrique entre les groupes SU(1,1), SL(2,R) et SO(1,2)), cf. le §13, vol. 1 de [DNF] (Doubrovine, Novikov, Fomenko, Géométrie contemporaine).)