M2/CFP/Parcours de Physique Théorique

Invariances en physique et théorie des groupes

Représentation de dimension infinie d'un groupe

1. On considère une fonction $f(x)$ d'une variable réelle x, appelée "coordonnée". Par changement de la coordonnée $x \mapsto x'$, on suppose que f se transforme selon $f \mapsto f'$, avec f' définie par

$$f'(x') = f(x)$$

a) Justifier l'appellation "fonction scalaire" pour f

b) Si $x \mapsto x'$ est une variation infinitésimale : $x' = x + \epsilon(x)$, calculer la variation $\delta f(x) = f'(x) - f(x)$ au premier ordre en ϵ et montrer qu'elle s'exprime comme l'action d'un opérateur différentiel sur $f(x)$.

c) 1er cas particulier $x' = x + \delta a$: interprétation géométrique ? forme de δf ?

d) 2ème cas particulier $x' = x(1 + \delta b)$: interprétation géométrique ? forme de δf ?

e) 3ème cas particulier $x' = x + x^2 \delta c$: forme de δf ?

2. On considère maintenant les trois opérateurs différentiels

$$A = \frac{d}{dx} \quad (1)$$

$$B = x\frac{d}{dx} \quad (2)$$

$$C = x^2\frac{d}{dx} \quad (3)$$

a) Calculer les relations de commutation de A, B, C.

b) Qu'évoquent pour vous ces relations ?

c) Quelle est l'interprétation géométrique de B ?

d) Les opérateurs A, B, C forment-ils une algèbre de Lie ?

e) Est-elle semi-simple ? Comment le voir ?

f) Est-elle compacte ? Comment le voir ?

g) Quel est l'opérateur de Casimir ?

h) Que peut-on dire de cet opérateur de Casimir dans une représentation irréductible de l'algèbre ?

3. Reprendre la question 2 dans le cas où l'on remplace les opérateurs A,B,C par les opérateurs

$$
\begin{aligned}
A' &= \frac{d}{dx} = A && (4)\\
B' &= x\frac{d}{dx} - j && (5)\\
C' &= x^2\frac{d}{dx} - 2jx && (6)
\end{aligned}
$$