DEA de Physique Théorique

Propagation et radiation en théorie classique des champs

1 Fonction de Green

En théorie classique des champs, les équations du mouvement sont typiquement du type Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = j(x) \tag{1}$$

où j dépend a priori des champs ϕ et où l'on oublie les indices supplémentaires éventuels (indices de Lorentz...). Dans le cadre des équations de Maxwell, cette équation est par exemple satisfaite par le potentiel, dans la jauge de Lorentz, avec $m^2 = 0$.
On obtient les solutions de cette équation si on connait les solutions (dites fonctions de Green) de l'équation

$$(\Box + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x'). \tag{2}$$

De manière générale on ne s'intéresse qu'aux solutions invariantes par translation de sorte que l'on n'a à considérer que les fonctions de Green $G(x, x')$ qui ne dépendent que de $x - x'$.
Les solutions générales de l'Eq.(1) s'obtiennent alors grâce au principe de superposition par

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int d^4x' \, G(x - x') \, j(x') \, , \tag{3}$$

où $\phi^{(0)}(x)$ est solution de l'équation homogène et choisie de sorte que ϕ satisfasse aux conditions aux limites (choisies de façon générale sur des surfaces de genre espace, l'équation étant du type hyperbolique).
L'invariance par translation des solutions de l'Eq.(3) permet alors par analyse de Fourier de remplacer le problème par un problème algébrique. En posant

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, e^{-ip.(x-x')} \tilde{G}(p) \, , \tag{4}$$

on obtient donc

$$(-p^2 + m^2) \, \tilde{G}(p) = 1 \, . \tag{5}$$

La solutions générale est donc complétement déterminée, à une distribution à support sur l'hyperboloïde à deux nappes $p^2 - m^2 = 0$ près (ou sur le cône $p^2 = 0$ si $m^2 = 0$), de la forme

$$g\left(\vec{p}, \frac{p_0}{|p_0|}\right) \, \delta(p^2 - m^2). \tag{6}$$

Cette dernière distribution est solution de l'équation de Klein-Gordon homogène.

On définit en premier lieu les fonctions de Green retardée et avancée:

$$\tilde{G}_{\substack{ret \\ av}}(p) = \frac{-1}{(p_0 \pm i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}. \tag{7}$$

1) Montrer que ces fonctions de Green sont invariantes de Lorentz.
En étudiant la structure analytique de $\tilde{G}_{\substack{ret \\ av}}(p)$, simplifier $G_{\substack{ret \\ av}}(x)$ en effectuant l'intégration sur p_0. On notera $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.
Justifier les appellations de fonctions de Green avancée et retardée, en précisant le support de ces deux distributions.

2) Calculer explicitement

$$G_{\substack{ret \\ av}}(x) \mid_{m^2=0} \tag{8}$$

On peut donner une forme explicite de $G_{\substack{ret \\ av}}(x)$ pour toute valeur de m en termes de fonctions de Bessel (voir par exemple Bogolioubov-Chirkov §14).

3) On souhaite donner une interprétation physique au résultat obtenu à la question 1). On suppose pour cela que le système est enfermé dans une très grande boite cubique de taille L. L'intégrale sur l'impulsion doit alors être remplacée par une somme de Riemann. En prenant par exemple des conditions aux bords périodiques, et en introduisant les ondes planes

$$\varphi_{\pm,\vec{p}}\,(x) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_p}} e^{\mp i\omega_p x_0 + i\vec{p}.\vec{x}}, \tag{9}$$

donner l'expression correspondante de $G_{\substack{ret \\ av}}(x)$. Interpréter l'expression obtenue, et vérifier qu'elle est réelle.

4) Montrer que la différence $G^{(-)}(x) \equiv G_{ret}(x) - G_{av}(x)$ est une fonction impaire qui s'annulle en dehors du cône de lumière, qui satisfait l'équation de Klein-Gordon homogène et telle que

$$\frac{\partial}{\partial x_0} G^{(-)}(x) \mid_{x_0=0} = \delta^3(\vec{x}). \tag{10}$$

Dans la limite $m^2 = 0$, montrer que

$$G^{(-)}(x) \mid_{m^2=0} = \frac{1}{2\pi}\epsilon(x_0)\,\delta(x^2) = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{4\pi^2 i}\left[\frac{1}{(x - i\eta)^2} - \frac{1}{x + i\eta)^2}\right] \tag{11}$$

où η est un vecteur infinitésimal de genre temps avec $\eta_0 > 0$. Enfin, montrer que

$$G^{(+)} \equiv \frac{1}{2}[G_{ret}(x) + G_{av}(x)] = -\frac{PP}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip.x}\frac{1}{p^2 - m^2}\,. \tag{12}$$

On rappelle que

$$\frac{1}{p_0 - \omega_p \pm i\epsilon} = PP\frac{1}{p_0 - \omega_p} \mp i\pi\delta(p_0 - \omega_p)\,. \tag{13}$$

Les fonctions de Green introduites précédemment apparaissent en théorie des champs classiques. En théorie quantique des champs, la fonction de Green retardée apparait sous la forme

$$G_{ret}(x-y) = i\theta(x_0-y_0)\langle 0|[\Phi(x),\Phi(y)]|0\rangle \,. \tag{14}$$

où Φ est un champ bosonique. Il est en fait plus naturel d'introduire une autre fonction de Green (introduite pour la première fois par Stueckelberg et Feynman), qui est complexe (contrairement au cas classique), définie par

$$G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip.x}\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{15}$$

Cette distribution est impaire.

5) Simplifier cette expression en intégrant sur p_0. En suivant la même approche que dans la question 3), donner l'expression discrétisée de cette distribution. Interpréter ce résultat. Montrer que G_F ne s'annulle pas en dehors du cône de lumière. On calculera pour cela $G_F(x_0=0,r)$ avec $r=|\vec{x}|$.

En théorie quantique des champs, cette fonction de Green apparait sous la forme

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &= i\theta(x_0-y_0)\langle 0|\Phi(x)\,\Phi(y)|0\rangle + i\theta(y_0-x_0)\langle 0|\Phi(y)\,\Phi(x)|0\rangle && (16)\\ &\equiv i\langle 0|T\,\Phi(x)\,\Phi(y)|0\rangle \,. && (17)\end{aligned}$$

Dans le cas d'un champ complexe (particule scalaire chargée),

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &= i\theta(x_0-y_0)\langle 0|\Phi(x)\,\Phi^\dagger(y)|0\rangle + i\theta(y_0-x_0)\langle 0|\Phi^\dagger(y)\,\Phi(x)|0\rangle && (18)\\ &\equiv i\langle 0|T\,\Phi(x)\,\Phi^\dagger(y)|0\rangle \,. && (19)\end{aligned}$$

On voit donc que la fonction de Green de Feynman permet de retrouver la description particules-antiparticules de Dirac.
Nous verrons dans le TD suivant l'équivalent de cette fonction de Green pour les fermions.

Dans le cas de l'électromagnétisme, l'équation de Maxwell satisfaite par le potentiel vecteur s'écrit

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial.A) = j^\mu \tag{20}$$

Montrer qu'elle ne suffit pas à elle seule à déterminer A^μ en fonction de j^μ (en essayant de construire la fonction de Green correspondante). Pour résoudre ce problème, on est amené à donner une masse au photon ou alors à ajouter un terme de fixation de jauge dans le lagrangien (voir cours de théorie des champs). Dans la jauge covariante de Lorentz, on ajoute donc au lagrangien le terme

$$\mathcal{L}_{jauge} = \frac{\lambda}{2}(\partial.A)^2 \,, \tag{21}$$

de sorte que le lagrangien complet s'écrit

$$\mathcal{L}_{e.m} = -\frac{1}{4}F^2 - j.A + \frac{\lambda}{2}(\partial.A)^2\,, \tag{22}$$

6) Ecrire les équations du mouvement du lagrangien correspondant. En déduire la fonction de Green correspondante (avec la prescription de Feynman). Vérifier que l'on retrouve le propagateur de Feynman du cas scalaire dans le cas où $\lambda = 1$.

2 Radiation

2.1 Champ créé par une charge ponctuelle

Comme application élémentaire des fonctions de Green, nous allons calculer les champs électromagnétiques engendrés par une charge ponctuelle en mouvement.

7) Soit une particule de charge e localisée sur sa trajectoire d'espace-temps $x^\mu(\tau)$, où τ est le temps propre de la particule. Montrer que le courant j^μ correspondant peut s'écrire

$$j^\mu(t, \vec{y}) = e\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \frac{dx^\mu}{ds}\delta^4(y - x(s)). \tag{23}$$

8) On note $x_+ \equiv x(\tau_+)$ le seul point retardé de la trajectoire qui vérifie

$$(y - x_+)^2 = 0 \qquad x_+^0 < y^0\,. \tag{24}$$

Montrer que dans la jauge de Lorentz, on obtient le potentiel retardé de Lienard-Wiechert

$$A^\mu_{ret}(y) = \frac{e}{4\pi}\frac{\dot{x}_+^\mu}{\dot{x}_+\,.\,(y - x_+)}\,. \tag{25}$$

Vérifier que l'on retrouve bien le potentiel de Coulomb dans le référentiel où $\dot{x}_+^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

9) Mettre A sous la forme

$$A^0_{ret}(y) = \frac{e}{4\pi(r - \vec{r}\,.\,\vec{v}_+)} \qquad \vec{A}_{ret}(y) = \frac{e\,\vec{v}_+}{4\pi(r - \vec{r}\,.\,\vec{v}_+)} \tag{26}$$

En déduire l'expression de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.

2.2 Bremsstrahlung classique

On souhaite maintenant étudier le rayonnement d'une charge brutalement accélérée. On note $u_i = p_i/m$ et $u_f = p_f/m$ les quadri-vitesses initiale et finale de la particule chargée. En choisissant l'origine des coordonnées d'espace-temps au point où la particule est accélérée, sa trajectoire prend la forme

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{p_i}{m}\tau & \tau < 0 \\ \\ \frac{p_f}{m}\tau & \tau > 0 \end{cases} \tag{27}$$

10) Montrer que le courant s'écrit, en représentation de Fourier

$$j^\mu(x) = \frac{-ie}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik.x}\left[\frac{p_i^\mu}{p_i.k} - \frac{p_f^\mu}{p_f.k}\right] . \tag{28}$$

11) Pour $t \to -\infty$, comme la conservation du courant interdit son annulation, on va exiger que le champ électromagnétique se réduise au champ de Coulomb de la particule incidente. On décompose donc le champ A^μ en la somme d'un champ de radiation (solution de l'équation de Maxwell homogène) et d'un champ de Coulomb accompagnant la particule. En utilisant la question 4), donner l'expression des deux champs correspondants en fonction de $G^{(-)}$, G_{av} et j^μ.

12) En utilisant la forme explicite de $G^{(-)}$, calculer $F^{\mu\nu}_{rad}(x)$.

13) On rappelle que le tenseur d'énergie-impulsion $\Theta^{\mu\nu}_{rad}$ du champ $A^\mu_{rad}(x)$ s'écrit

$$\Theta^{\mu\nu}_{rad} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2_{rad} + F^{\mu\rho}_{rad}F^{\nu}_{rad\,\rho} . \tag{29}$$

Pour un vecteur de genre lumière $k^0 = |\vec{k}|$, on définit deux vecteurs polarisation orthogonaux de genre espace qui vérifient

$$\epsilon_\lambda^2 = -1 \quad \epsilon_1 . \epsilon_2 = 0 \quad \epsilon_\lambda . k = 0 . \tag{30}$$

En déduire que l'énergie émise à un instant $t > 0$ s'écrit

$$\mathcal{E} = \int d^3x\, \Theta^{00}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2k_0}k_0 \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon_\lambda.\tilde{j}^\mu(k)|^2 . \tag{31}$$

Quel est le nombre dN de photons de polarisation ϵ émis par espace de phase d^3k?
En déduire que l'énergie totale est finie tandis que le nombre total de photon ne l'est pas. Ce phénomène porte le nom de catastrophe infrarouge.