DEA de Physique Théorique
Mécanique Quantique Avancée

Tenseur d'énergie-impulsion et tenseur de Belinfante

1 Tenseur canonique d'énergie-impulsion

1) Considérons un lagrangien $\mathcal{L}_0(\varphi_i, \partial\varphi_i)$ dépendant de champs φ_i et de leurs derivées, qui ne dépend pas explicitement des coordonnées d'espace-temps. On ajoute à ce lagrangien un terme de couplage à des sources extérieures de la forme $\mathcal{L}_1 = \sum_i \varphi_i(x)\, j_i(x)$ qui brise explicitement l'invariance par translation d'espace-temps de l'action. Exprimer le tenseur canonique d'énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ associé au lagrangien $\mathcal{L}$ en fonction du tenseur canonique d'énergie-impulsion $T_0^{\mu\nu}$ associé au lagrangien $\mathcal{L}_0$. En reprenant la démonstration du théorème de Noether vue en cours, calculer la valeur de $\partial_\mu T^{\mu\nu}$. En déduire celle de $\partial_\mu T_0^{\mu\nu}$.

2) Le lagrangien du champ électromagnétique couplé à une source extérieure, s'écrit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\nu A^\nu \,. \tag{1}$$

Calculer le tenseur canonique d'énergie-impulsion associé à ce lagrangien, et donner la valeur de sa quadri-divergence $\partial_\mu T^{\mu\nu}$. Le tenseur $T^{\mu\nu}$ est-il symétrique?

3) Calculer la composante T^{00}. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V) - \vec{j} \cdot \vec{A} \,. \tag{2}$$

Dans le cas d'un champ libre, peut-on interpréter ce résultat comme la densité d'énergie? Calculer l'énergie totale dans le cas libre. Ce résultat est-il conforme à celui attendu?

4) Calculer de même la densité d'impulsion du champ électromagnétique. Montrer qu'elle prend la forme

$$T^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A^i \,. \tag{3}$$

Même question que précédemment.

5) Discuter l'invariance de jauge de $T^{\mu\nu}$ et du quadrivecteur énergie-impulsion totale associé.

La conclusion des questions précédente est que le tenseur canonique d'énergie-impulsion, déduit du théorème de Noether, donne (par définition!) correctement l'énergie et l'impulsion totales, mais pas forcément la forme correcte de la densité d'énergie et d'impulsion. Pour obtenir correctement ces quantités, une méthode consiste à utiliser la géométrie différentielle. En considérant les transformations *locales* d'espace-temps (ici, elles sont globales), on peut alors obtenir la densité d'énergie et d'impulsion, qui apparaît en particulier naturellement dans le cadre de la relativité générale, lorsque l'on couple le champ électromagnétique à la gravitation (voir TD de théorie des champs et le cours de relativité générale; on pourra consulter le Landau de Théorie de Champs §94). Noter que la relativité générale ne joue ici aucun rôle en dehors du fait qu'elle s'écrit dans un cadre invariant sous les transformations locales des coordonnées.

2 Tenseur de Belinfante

Nous avons vu en cours que dans le cas d'un champ scalaire, la conservation du vecteur densité de courant de moment cinétique implique la symétrie du tenseur d'énergie-impulsion. Dans le cas général d'un champ de spin non nul, la transformation de Lorentz du champ prend la forme

$$\phi'_a(x') = S(\Lambda)_{ab}\,\phi_b(x)\,. \tag{4}$$

La forme explicite de $S(\Lambda)$ dépend de la représentation du groupe de Lorentz restreint (ou plus exactement de son groupe de recouvrement $SL(2, C)$: voir cours) à laquelle appartient le champ ϕ_a. C'est une matrice $N \times N$ fonction de la transformation de Lorentz Λ considérée. Dans le cas du champ électromagnétique qui nous intéresse ici, A^μ se transforme comme un vecteur, i.e

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_{\ \nu}\, A^\nu(x)\,. \tag{5}$$

Autrement dit, la représentation du groupe de Lorentz est ici donnée simplement par $S(\Lambda) = \Lambda$. Dans la suite, nous allons supposer que l'action est invariante sous la transformation

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu_{\ \nu}\, x^\nu \\ A'^\mu(x') &= \Lambda^\mu_{\ \nu}\, A^\nu(x)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

1) On considère une transformation de Lorentz infinitésimale $\Lambda^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} + \omega^\mu_{\ \nu}$ avec $|\omega^\mu_{\ \nu}| \ll 1$. En utilisant le fait que $S(\Lambda)_{ab}$ est également infinitésimale et linéaire en $\omega^\mu_{\ \nu}$ (en général en physique on ne considère que les représentations *linéaires* des algèbres de Lie, ici de l'algèbre de Lie du groupe de recouvrement $SL(2, C)$), montrer que le courant de Noether associé à la transformation (4) peut s'écrire

$$J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu\rho} \tag{7}$$

où $\Delta^{\mu\nu\rho}$ est un tenseur antisymétrique en ν et ρ.

2) Calculer $\Delta^{\mu\nu\rho}$ dans le cas du champ électromagnétique.

3) Exprimer $T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu}$ en fonction de $\Delta^{\mu\nu\rho}$.

4) Soit J^μ le courant de Noether associé à une symétrie continue de l'action. Montrer que le courant $J'^\mu = J^\mu + \partial_\rho X^{\rho\mu}$ (où $X^{\rho\mu}$ est un tenseur antisymétrique fonction des champs et des coordonnées d'espace temps, supposé s'annuler rapidement à grande distance) est également conservé, et que les charges associées à J^μ et J'^μ sont identiques.

5) Soit $X^{\rho\mu\nu}$ un tenseur antisymétrique dans les indices ρ et μ. Montrer que si la condition

$$X^{\mu\nu\rho} - X^{\mu\rho\nu} = \Delta^{\mu\nu\rho} \tag{8}$$

est vérifiée, alors le tenseur d'énergie-impulsion modifié

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu} \tag{9}$$

est également conservé et conduit aux mêmes énergies et impulsions totales.

6) Montrer que

$$X^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\nu\rho} - \Delta^{\nu\mu\rho} - \Delta^{\rho\mu\nu}) \tag{10}$$

vérifie les conditions précédentes.

7) Appliquer le résultat précédent au cas du champ électromagnétique. Vérifier que le tenseur d'énergie-impulsion ainsi obtenu est symétrique dans le vide. Calculer sa trace. Calculer la densité d'énergie-impulsion correspondante.

8) Discuter l'invariance de jauge du tenseur $T'^{\mu\nu}$ en absence de source, puis en présence de source. Comment expliquer le résultat obtenu dans ce dernier cas?

9) Reprendre la question précédente en incluant la dynamique des sources dans le lagrangien.