Critère de confinement et boucle de Wilson

système : paire $q\bar{q}$ $\quad |q(\underbrace{t,\vec{0}}_{x'})\ \bar{q}(\underbrace{t,\vec{R}}_{x})\rangle$

E : énergie du système

* absence de confinement : $E(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 2m$ $\qquad m =$ masse du quark

* confinement : $E(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$$|q(t,\vec{0})\ \bar{q}(t,\vec{R})\rangle = \sum_C f(C)\ \bar{q}\underset{x'}{(t,\vec{0})}\ \underbrace{U((t,\vec{0}),(t,\vec{R});C)}\ q\underset{x}{(t,\vec{R})}|0\rangle$$

$$U(x',x;C) = P\exp\ g\int_x^{x'} dx^\mu A_\mu(x)$$

$P(x',x;C)$
$\equiv \bar{q}(x')\,U(x',x;C)\,q(x)$ est un opérateur invariant de jauge :

$x' = (t,\vec{0}) \qquad x = (t,\vec{R})$

$$q(x) \longrightarrow D[g(x)]\ q(x)$$

$$U(x',x;C) \longrightarrow D[g(x')]\ U(x',x;C)\ D[g(x)]^{-1}$$

$$\bar{q}(x') \longrightarrow \bar{q}(x')\ D[g(x')]^{-1}$$

Considérons le recouvrement entre l'état $q\bar{q}$ à l'instant $t=0$ et l'état $q\bar{q}$ à l'instant $t=T$:

$$\Omega(T,R) = \langle 0|[\bar{q}(0,\vec{0})U([0,\vec{0}],[0,\vec{R}];C)q(0,\vec{R})]^+\ \bar{q}(T,\vec{0})U([T,\vec{0}],[T,\vec{R}];C)q(T,\vec{R})|0\rangle$$

$$= \langle 0|\,P[(0,\vec{0}),(0,\vec{R});C]^+\ P((T,\vec{0}),(T,\vec{R});C)|0\rangle$$

1) même idée que celle qui permet de calculer une fonction de corrélation en théorie des champs en formulation d'intégrale de chemin ou en formulation canonique (en passant dans ce cas à la représentation d'interaction) :

on insère $1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$ où $|n\rangle$ est état propre de H d'énergie E_n

Comme $\mathcal{O}(t,\vec{x}) = e^{iHt}\,\mathcal{O}(0,\vec{x})\,e^{-iHt}$ (ici $\mathcal{O} = P$) on a donc

$$\Omega(T,R) = \langle 0|\,P[(0,\vec{0}),(0,\vec{R});C]^+\ P[(0,\vec{0}),(0,\vec{R});C]|0\rangle\, e^{+iE_nT} \quad \text{car } e^{-iHt}|n\rangle = e^{-iE_nt}|n\rangle$$

en passant à l'euclidien $t \to t_E = it$, i.e $t = -it_E$ on a donc

$$\Omega(T,R) \sim e^{-E(R)T}$$ où $E(R)$ est la plus petite valeur propre E_n, correspondant à l'énergie potentielle du système $q\bar{q}$ séparé d'une distance R.

2) on étudie maintenant en détail la structure de $\Omega(T,R)$:

$$\Omega(T,R) = \langle 0|\, \bar{q}^i(0,\vec{R})\, U[(0,\vec{R}),(0,\vec{0});C]_{ij}\, q^j(0,\vec{0})\, \bar{q}^k(T,\vec{0})\, U[(T,\vec{0}),(T,\vec{R});C]_{kl}\, q^l(T,\vec{R})\,|0\rangle$$

(i,j,k,l : indices dans la représentation $\mathcal{D}$, ici 3 et $\bar{3}$)

Supposons que les champs de quarks ne sont pas dynamiques : ceci est le cas pour des quarks lourds. On peut alors les traiter comme des termes de source. Cette limite est appelée limite <u>eikonale</u>.

On a alors

$$\langle 0|\, q^j(x')\, \bar{q}^k(x)\,|0\rangle = \left[P \exp g \int_{x(s)=x}^{x(s')=x'} A_\mu(x(s))\, dx^\mu\right]_{jj'} \underbrace{\langle 0|\, q^{j'}(x')\, \bar{q}^k(x)\,|0\rangle_{\text{libre}}}_{\text{terme de source}}$$

(voir G. Sterman "An introduction to QFT" p390-391, en particulier eq. (12-57). Voir aussi A. Shuvaev et S. Wallon Eur. Phys. J. C46 (2006) 135)

noter que la nature spinorielle de la source ne joue aucun rôle ici. La structure du résultat serait identique pour une particule de spin quelconque (scalaire, vectorielle, etc.)

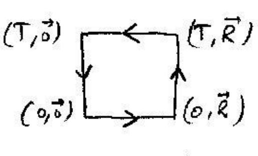
donc $\langle 0|\, q^j(0,\vec{0})\, \bar{q}^k(T,\vec{0})\,|0\rangle \sim U[(0,\vec{0}),(T,\vec{0});C]_{jj'}\, \delta^{j'k}\, e^{-mT}$ $\quad k \longrightarrow j$

$$\langle 0|\, \bar{q}^i(0\vec{R})\, q^l(T,\vec{R})\,|0\rangle \underset{\text{anticommutation}}{=} -\langle 0|\, q^l(T,\vec{R})\, \bar{q}^i(0,\vec{R})\,|0\rangle \sim -U[(T,\vec{R}),(0,\vec{R});C]_{li} \times e^{-mT}$$

d'où $$\Omega(T,R) \sim -\langle 0|\, U[(0,\vec{R}),(0,\vec{0})]_{ij}\, U[(0,\vec{0}),(T,\vec{0})]_{jk}\, U[(T,\vec{0}),(T,\vec{R})]_{kl}\, U[(T,\vec{R}),(0,\vec{R})]_{li}\,|0\rangle\, e^{-2mT}$$

soit $\Omega(T,R) \sim e^{-2mT}\, W(C)$ $\qquad W(C) = \langle 0|\, \mathrm{Tr}\, U[x,x,C]\,|0\rangle$

et $\lim_{T\to\infty} W(C) \sim e^{-T[E(R)-2m]}$ soit $\boxed{E(R)-2m = -\lim \frac{\ln W(C)}{T}}$



Théories de jauge sur réseau

I - Partant de $\displaystyle\int \frac{d\mu(g)}{v(G)}\, D^{(\rho)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(\sigma)*}_{\alpha'\beta'}(g) = \frac{1}{n_\rho}\,\delta_{\rho\sigma}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\beta\beta'}$

qui s'écrit encore $\displaystyle\int \frac{d\mu(g)}{v(G)}\, D^{(\rho)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(\sigma)}_{\beta'\alpha'}(g^{-1}) = \frac{1}{n_\rho}\,\delta_{\rho\sigma}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\beta\beta'}$

on a donc $\displaystyle\frac{1}{n_\rho}\,\delta_{\rho\sigma}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\beta\beta'} = \int \frac{d\mu(g)}{v(G)} \sum_{\alpha_1,\beta_1} D^{(\rho)}_{\alpha\beta_1}(gg_1)\, D^{(\rho)}_{\beta_1\beta}(g_1^{-1})\, D^{(\sigma)}_{\beta'\alpha_1}(g^{-1}g_2)\, D^{(\sigma)}_{\alpha_1\alpha'}(g_2^{-1})$

En multipliant par $D^{(\rho)}_{\beta\beta_2}(g_1)\, D^{(\sigma)}_{\alpha'\alpha_2}(g_2)$ et en sommant sur β et α' on a

$$\int \frac{d\mu(g)}{v(G)} \sum_{\alpha_1,\beta_1} D^{(\rho)}_{\alpha\beta_1}(gg_1)\,\delta_{\beta_1\beta_2}\,\delta_{\alpha_1\alpha_2}\, D^{(\sigma)}_{\beta'\alpha_1}(g^{-1}g_2) = D^{(\rho)}_{\beta'\beta_2}(g_1)\, D^{(\sigma)}_{\alpha\alpha_2}(g_2)\,\frac{\delta_{\rho\sigma}}{n_\rho}$$

i.e. $\displaystyle\int \frac{d\mu(g)}{v(G)}\, D^{(\rho)}_{\alpha\beta_2}(gg_1)\, D^{(\sigma)}_{\beta'\alpha_2}(g^{-1}g_2) = D^{(\rho)}_{\beta'\beta_2}(g_1)\, D^{(\sigma)}_{\alpha\alpha_2}(g_2)\,\frac{\delta_{\rho\sigma}}{n_\rho}$ (a)

* faisons $\rho=\sigma$, $\beta'=\beta_2$, $\alpha=\alpha_2$ et sommons sur α_2 et β_2. Alors

$$\int \frac{d\mu(g)}{v(G)}\, \underbrace{D^{(\rho)}_{\alpha_2\beta_2}(gg_1)\, D^{(\rho)}_{\beta_2\alpha_2}(g^{-1}g_2)}_{=\sum_{\alpha_2} D^{(\rho)}_{\alpha_2\alpha_2}(gg_1g^{-1}g_2)} = \frac{1}{n_\rho}\,\chi(g_1)\,\chi(g_2)$$

d'où

$$\boxed{\int \frac{d\mu(g)}{v(G)}\, \chi^{(\rho)}(gg_1g^{-1}g_2) = \frac{1}{n_\rho}\,\chi^{(\rho)}(g_1)\,\chi^{(\rho)}(g_2)}$$

* dans (a), faisons $\beta_2=\alpha$ et sommons sur α. Alors

$$\int \frac{d\mu(g)}{v(G)} \sum D^{(\rho)}_{\alpha\alpha}(gg_1)\, D^{(\sigma)}_{\beta'\alpha_2}(g^{-1}g_2) = D^{(\rho)}_{\beta'\alpha_2}(g_1\cdot g_2)\,\frac{\delta_{\rho\sigma}}{n_\rho}$$

puis $\alpha_2=\beta'$ et sommation sur α_2 donne

$$\boxed{\int \frac{d\mu(g)}{v(G)}\, \chi^{(\rho)}(gg_1)\, \chi^{(\sigma)}(g^{-1}g_2) = \chi(g_1\cdot g_2)\,\frac{\delta_{\rho\sigma}}{n_\rho}}$$

G est compact, donc toute représentation de G est équivalente à une représentation unitaire.

Donc $D(g^{-1}) = D^{\dagger}(g)$ d'où $\chi^{(\rho)}(g^{-1}) = [\chi^{(\rho)}(g)]^*$ (car $\mathrm{tr}\, D(g) = \mathrm{tr}\, {}^tD(g)$)

$D^{(\bar\rho)}(g) \equiv [D^{(\rho)}(g)]^*$ donc $\chi^{(\bar\rho)}(g) = [\chi(g)]^*$ i.e. $\boxed{\chi^{(\rho)}(g^{-1}) = \chi^{(\bar\rho)}(g) = [\chi^{(\rho)}(g)]^*}$

II – a) D'après le théorème de Peter-Weyl, toute fonction de classe continue peut se décomposer sur la base des caractères irréductibles :

$$e^{\beta \chi(g)} = \sum_{e} n_e b_e \chi^{(e)}(g)$$

$$\int \frac{d\mu(g)}{v(G)} e^{\beta \chi(g)} \chi^{(e)*}(g) = \int \frac{d\mu(g)}{v(G)} \sum_{\sigma} n_\sigma b_\sigma \chi^{(\sigma)}(g) \chi^{(e)*}(g) = n_e b_e$$

d'où $\boxed{b_e(\beta) = \frac{1}{n_e} \int \frac{d\mu(g)}{v(G)} e^{\beta \chi(g)} \chi^{(e)*}(g)}$

b) $e^{\beta \chi(g)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \chi(g)^n$

(e) apparaît dans $(r)^{\otimes n}$ $\Leftrightarrow$ la multiplicité $\int \frac{d\mu(g)}{v(G)} \chi(g)^n \chi^{(e)*}(g)$ est non nulle, et <u>positive</u>.

|| Il faut et il suffit donc que l'une de ces multiplicités soit non nulle pour que $b_e(\beta) \neq 0$.

c) Toute représentation irréductible de $SU(2)$ s'obtient par produit tensoriel de la représentation $(\frac{1}{2})$.

La condition b) est donc satisfaite pour $r = (j = \frac{1}{2})$.

En revanche pour $r = (j = 1)$, toutes les représentations de spin demi-entier ne peuvent être obtenues par produit tensoriel de représentations $j = 1$, donc $b_{\frac{2p+1}{2}} = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

d) $(3 \oplus \bar{3})^n$ pour n arbitraire permet d'engendrer toutes les représentations irréductibles de $SU(3)$.

D'où l'on déduit d'après b) que $b_e \neq 0$ $\forall e$.

Si $\beta \to 0$, $e^{\beta \chi(g)} \to 1$

Tous les b_e tendent vers 0

$$b_a(\beta) \sim \frac{1}{n_a} \int \frac{d\mu(g)}{v(G)} \chi^{(a)}(g) \Big[1 + \beta\big(\underset{\downarrow \atop 0}{\chi^{(3)}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\chi^{(\bar{3})}}\big) + \frac{1}{2}\beta^2\Big(\underset{\downarrow \atop 0}{(\chi^{(3)})^{\otimes 2}} + \underset{\downarrow \atop 0}{(\chi^{(\bar{3})})^{\otimes 2}} + 2\underbrace{\chi^{(3)} \otimes \chi^{(\bar{3})}}_{\to 1}\Big) + \dots$$

$$\sim \frac{\beta^2}{n_a}$$

Dans le cas où e est la représentation de plus haut poids $\Lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, $b_e \propto \beta^{\lambda^1 + \lambda^2}$

III - a) $g_P = g_{ij}\, g_{jk}\, g_{kl}\, g_{li}$ devient, sous la transformation de jauge,

$$g'_P = g_i\, g_{ij}\, g_j^{-1}\, g_j\, g_{jk}\, g_k^{-1}\, g_k\, g_{kl}\, g_l^{-1}\, g_l\, g_{li}\, g_i^{-1}$$

$$= g_i\, g_{ij}\, g_{jk}\, g_{kl}\, g_{li}\, g_i^{-1} = g_i\, g_P\, g_i^{-1}$$

Or $\chi(g'_P) = \chi(g_i\, g_P\, g_i^{-1}) = \chi(g_P)$, d'où l'invariance de E.

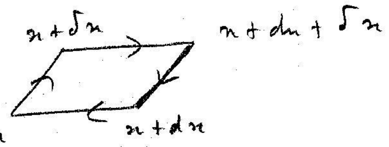
Si l'on change l'orientation des plaquettes, $g_P = g_{ij}\, g_{jk}\, g_{kl}\, g_{li}$ devient

$g_{il}\, g_{lk}\, g_{kj}\, g_{ji} = g_{li}^{-1}\, g_{kl}^{-1}\, g_{jk}^{-1}\, g_{ij}^{-1} = [g_{ij}\, g_{jk}\, g_{kl}\, g_{li}]^{-1} = g_P^{-1}$, or $\chi^{(e)}(g_P^{-1}) = [\chi^{(e)}(g_P)]^* = \chi^{(e)}(g_P)$ (e est réelle)

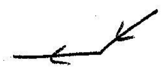
E est donc invariante par changement d'orientation des plaquettes

c) On rappelle que $e^{\lambda A}\, e^{\lambda B} = e^{\lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}[A,B]} + O(\lambda^3)$

Donc pour le parallélogramme :



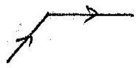
on a, en notant $P(x', x) = P\exp \int_x^{x'} A_\mu\, dx^\mu$



$P(x, x+dx)\, P(x+dx, x+dx+\delta x)$

$= P\exp(-A_\mu(x)\, dx^\mu)\, P\exp(-A_\nu(x+dx)\, \delta x^\nu)$

$= \exp[-A_\mu dx^\mu - A_\nu \delta x^\nu - \partial_\mu A_\nu\, dx^\mu \delta x^\nu + \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]\, dx^\mu \delta x^\nu$



et $P(x+dx+\delta x, x+\delta x)\, P(x+\delta x, x)$

$= P\exp[+A_\mu(x+\delta x)\, dx^\mu]\, P\exp[+A_\nu(x)\, \delta x^\nu)$

$= \exp[+A_\mu dx^\mu + A_\nu \delta x^\nu + \partial_\nu A_\mu\, dx^\mu \delta x^\nu + \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu]\, dx^\mu \delta x^\nu]$

d'où $P_{\square} = \exp[-\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\, dx^\mu \delta x^\nu)$ (car $A_\mu dx^\mu + A_\nu \delta x^\nu$ commute avec lui-même, donc pas d'autre correction quadratique)

$= \exp[-F_{\mu\nu} \underbrace{dx^\mu \delta x^\nu}_{-\sigma^{\mu\nu}}] = \exp[F_{\mu\nu}\, \sigma^{\mu\nu}]$

rem : $F_{\mu\nu} = T_a F^a_{\alpha\beta}$ est l'analogue du tenseur de courbure $R^\nu_{\mu\alpha\beta}$ en géométrie courbe

$\psi_i(x)$ subit une variation par le transport // $P_{\square}$

$\Delta\psi_i(x) = T_{a\,ij}\, F^a_{\alpha\beta}\, \psi_j(x)\, \sigma^{\alpha\beta}$

versus : V_μ subit un changement par transport parallèle $\Delta V_\mu = R^\nu_{\mu\alpha\beta}\, V_\nu\, \sigma^{\alpha\beta}$.

donc ici $\quad S_p = \exp\left[a^2 F_{\mu\nu} + o(a^2)\right]$

On rappelle que $\operatorname{tr} d_\Lambda(t_a)\, d_\Lambda(t_b) = -T_\Lambda\, \delta_{ab}$

avec $T_\Lambda = C_2(\Lambda)\, \dfrac{\dim \Lambda}{\dim g}$

$\uparrow$

Casimir de la représentation de plus haut poids Λ

$T_f = +\frac{1}{2}$ conventionnellement

Pour $SU(N)$, $T_A = +N$

$$E_p = -\chi^{(e)}(S_p) \sim -\operatorname{Tr}\exp(a^2 F_{\mu\nu}) = -\operatorname{Tr}\left[1 + a^2 F_{\mu\nu} + \frac{a^4}{2}(F_{\mu\nu})^2 + O(a^6)\right]$$

Comme $\operatorname{Tr} T^a = 0$, le terme linéaire disparait.

Donc $E_p \sim -\dim\Lambda + \dfrac{a^4}{2}\, C_2(\Lambda)\, \dfrac{\dim\Lambda}{\dim g} \sum_a (F_{\mu\nu}^a)^2$

car $F_{\mu\nu}^2 = T_\Lambda^a T_\Lambda^b F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b \quad$ et $\operatorname{tr} T_\Lambda^a T_\Lambda^b = -C_2(\Lambda)\, \dfrac{\dim\Lambda}{\dim g}\, \delta^{ab}$

pour $SU(N)$ et $\chi = \chi_N + \chi_{\bar N}$,

$$E_p \sim \Big(-N + \frac{a^4}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a\Big) \underset{T_N \text{ et } \bar N}{2}$$

Pour la théorie de jauge continue, $e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}} = e^{i\int d^4x \frac{1}{2g^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$

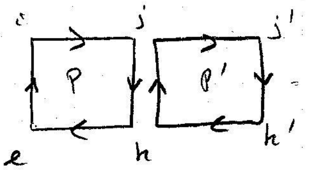
devient $e^{+\frac{1}{2g^2}\int d^4x\, \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}$ après passage dans l'euclidien $(x^0_E = i x^0$ i.e. $x^0 = -i x^0_E)$

Ici, on a $e^{-\beta \sum_p E_p} \sim e^{+\frac{\beta}{2}\sum_p \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu})^2 a^4}$ donc $\boxed{\beta = +\frac{1}{g^2}}$

d) g_P est un élément de G. Donc le résultat de II s'applique, et

$$e^{\beta\chi(g_P)} = \sum_e m_e b_e \chi^{(e)}(g_P).$$

e) assemblage de plaquettes:



P: $\chi(g_{ij}\, g_{jh}\, g_{he}\, g_{ei})$

P': $\chi(g_{jj'}\, g_{j'h'}\, g_{h'h}\, g_{jh}^{-1})$

$$\int \frac{d\mu(g_{jh})}{V(G)} \chi^{(e)}(g_{jh}\, g_{he}\, g_{ei}\, g_{ij})\, \chi^{(\sigma)}(g_{jh}^{-1}\, g_{jj'}\, g_{j'h'}\, g_{h'h}) = \frac{\delta_{e,\sigma}}{m_e}\chi^{(e)}(g_{PP'})$$

d'après (4-c)

avec $g_{PP'} = g_{he}\, g_{ei}\, g_{ij}\, g_{jj'}\, g_{j'h'}\, g_{h'h}$

pour une plaquette:

$$\int \frac{d\mu(g_{12})}{V(G)} \frac{d\mu(g_{23})}{V(G)} \frac{d\mu(g_{34})}{V(G)} \frac{d\mu(g_{41})}{V(G)} \chi^{(e)}(g_{12}\, g_{23}\, g_{34}\, g_{41}) = \delta_{e1}$$

car on peut faire le changement de variable $g_{41} \to g_{12}\, g_{23}\, g_{34}\, g_{41} = g'$

et utiliser $\int \frac{d\mu(g')}{V(G)} \chi^{(e)}(g') = \delta_{e1}$

$m_1 = 1$ donc pour 2 plaquettes:

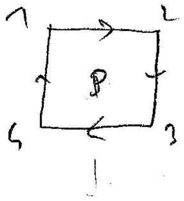
$$\sum_{e,\sigma}\int \frac{d\mu(g_{jh})}{V(G)} m_e b_e \chi^{(e)}(g_P)\, m_\sigma b_\sigma \chi^{(\sigma)}(g_{P'}) = \sum_e b_e^2 \frac{m_e^2}{m_e} \delta_{e,\sigma} \chi^{(e)}(g_{PP'})$$

$$= \sum_e b_e^2 m_e \chi^{(e)}(g_{PP'})$$

On s'est donc ramené au calcul sur une plaquette $P \cup P'$, ce qui conduit à b_1^2 (car $m_1 = 1$)

Au total, pour une plaquette d'aire N, on a $Z = b_1^N$

Sur C :



$$\prod_e \int \frac{d\mu(g_e)}{v(\sigma)} \quad \underbrace{\chi^{(\sigma)}(g_P)}_{=\chi^{(\sigma)}(g_P^{-1})} \quad \sum_e n_e b_e \chi^{(e)}(g_P)$$

$$=$$

$$g_P = g_{12}\, g_{23}\, g_{34}\, g_{41}$$

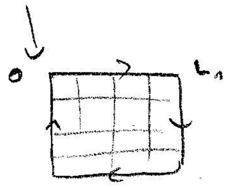
$$g_P^{-1} = g_{41}^{-1}\, g_{34}^{-1}\, g_{23}^{-1}\, g_{12}^{-1}$$

$$\int \frac{d\mu(g_{41})}{v(\sigma)} \chi^{(\sigma)}(g_{41}^{-1} g_{34}^{-1} g_{23}^{-1} g_{12}^{-1}) \sum_e \chi^{(e)}(g_{41}\, g_{12}\, g_{23}\, g_{34}) n_e b_e = \sum_e \frac{\delta_{e,\sigma}}{n_\sigma} \chi^{(\sigma)}(g_{34}^{-1} g_{23}^{-1} g_{12}^{-1} g_{12}\, g_{23}\, g_{34})\, n_e b_e$$

$$= b_\sigma \underbrace{\chi^{(\sigma)}(e)}_{=n_\sigma} = b_\sigma n_\sigma$$

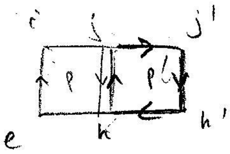
plus simple : $\chi^{(e)*}(g) = \chi^{(e)}(g)$ car g et g^{+} sont équivalents. On peut donc utiliser (3.2) directement.

$Z = b_1$ donc $W^{(\sigma)}(P) = \frac{1}{b_1} n_\sigma b_\sigma$ Ok



raisonnement similaire au précédent avec g_P remplacé par le produit des g_e le long de C. On a $\chi^{(\sigma)}(\prod_C g_e \prod_{-C} g_e^{-1}) = \chi^{(\sigma)}(e)$ → même résultat.

donc : $W^{(\sigma)}(P) = \frac{1}{b_1^A} n_\sigma b_\sigma^A = n_\sigma \left(\frac{b_\sigma}{b_1}\right)^A$



$$\prod_e \int \frac{d\mu(g_e)}{v(\sigma)} b_e n_e \chi^{(e)}(g_P) \underbrace{\chi^{(\sigma)}(g_{P'}) \sum_e n_e b_e \chi^{(e)}(g_{P'})}$$

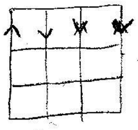
on intègre sur le lien $g_{jj'}$ → $b_\sigma n_\sigma$ qui se factorise

reste alors à intégrer sur les liens de P ⇒ b_1^{N-A}

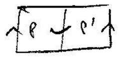
Or $Z = b_1^N$

donc $W = n_\sigma \left(\frac{b_\sigma}{b_1}\right)^A$

d)

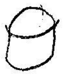


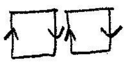
$\int$ sur a luen



$\longrightarrow \; b_e^{\,i} \, n_e \, \chi^{(e)}(g_{pp'})$

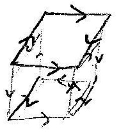
$\int$ lien de $g_{pp'} \; \rightarrow \; b_1^{\,i}$ (le fait que le bord soit libre ou périodique ne change rien) Si !

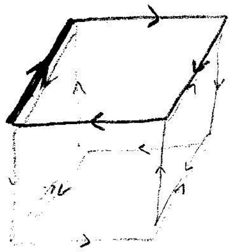




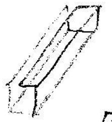
$$Z = \sum_e (b_e)^N$$

e) cond. : σ apparaît dans $(e)^{\otimes m}$

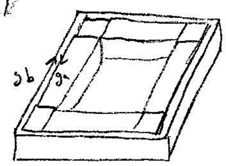




pour simplifier les notations, on note $\chi^{(\delta)}$ une rep. apparaissant dans le dév. de $e^{\beta \chi^{(e)}}$

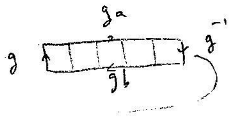


$n_\delta \, b_\delta^{\,n_p} \, \chi^{(\delta)}(g_p)$ après intégration sur les liens internes



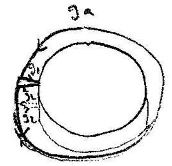
$\chi^{(\delta)}(g_a) \, \chi^{(\delta)}(g_b) \, b_\delta^{\,n_p}$

car :



ruban : $n_\delta \, b_\delta^{\,n_p} \, \chi^{(\delta)}(g_p)$

on ferme le ruban : $n_\delta \, b_\delta^{\,n_p} \displaystyle\int \frac{d\mu(g)}{V(G)} \, \chi^{(\delta)}(g\, g_a\, g^{-1} g_b) = \frac{n_\delta\, b_\delta^{\,n_p}}{n_\delta} \chi(g_a)\chi(g_b)$



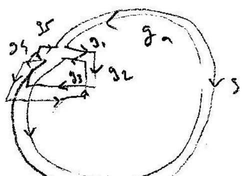
$$\int \frac{d\mu(g_1)}{V(G)} \int \frac{d\mu(g_2)}{V(G)} \, \chi(g_a\, g_1\, g_1^{-1}) \; \chi(g_b\, g_2\, g_2^{-1}) = \chi(g_a)\,\chi(g_b)$$

$\uparrow$ haut int $\quad \uparrow$ bas ou haut ext (ça ne change rien de l'échanger vers le haut)

Maintenant, on peut fermer le tore :

$$\int \frac{d\mu(g_a)}{V(G)} \, \chi^{(\delta)}(g_a) \, \chi^{(\delta)}(g_a^{-1}) \, \chi^{(\sigma)}(g_a^{-1})$$

$$\frac{d\mu(g_1)}{V(G)} \frac{d\mu(g_2)}{V(G)} \frac{d\mu(g_3)}{V(G)} \frac{d\mu(g_4)}{V(G)} \frac{d\mu(g_5)}{V(G)} \frac{d\mu(g_a)}{V(G)}$$



$$\chi^{(\delta)}(g_a^{-1} g_5^{-1} g_4^{-1} g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1} g_a \underbrace{g_1 g_2 g_3 g_4 g_5}_{g}) \, \chi^{(\sigma)}(g_a^{-1}) \; n_\delta \, b_\delta^{\,n_p}$$

$$= \chi^{(\delta)}(g_a^{-1} g^{-1} g_a\, g) \, \chi^{(\sigma)}(g_a^{-1}) \; n_\delta\, b_\delta^{\,n_p}$$ par changement de variable

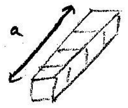
$$n_\delta\, b_\delta^{\,n_p} \int \frac{d\mu(g)}{V(G)} \, \chi^{(\delta)}(g_a^{-1} g^{-1} g_a\, g) \, \chi^{(\sigma)}(g_a^{-1}) \frac{d\mu(g_a)}{V(G)} = b_\delta^{\,n_p} \frac{d\mu(g_a)}{V(G)} \chi^{(\delta)}(g_a)\, \chi^{(\delta)}(g_a^{-1}) \underbrace{\chi^{(\sigma)}(g_a^{-1})}_{=\chi^{(\sigma)}(g_a)}$$

Conf (3) disque $\quad W^{(0)}(C_D) = m_\sigma \left(\frac{b_\sigma}{b_1}\right)^{RT} = m_\sigma\, e^{RT \ln \frac{b_\sigma}{b_1}}$

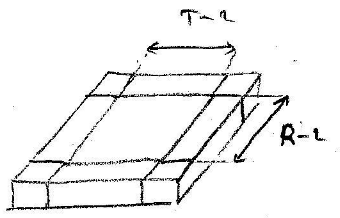
donc $V_D(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln W^{(0)}(C_D) = -R \ln \underbrace{\frac{b_\sigma}{b_1}}_{\substack{\to 0 \\ \beta \to 0}} > 0$ confinement

(3e) tore $\quad W^{(0)}(C_T) \sim \left(\frac{b_e}{b_1}\right)^{n_P}$

$n_P = ?$



de plaquettes du tube = 4a



Donc pour le tore:

$2 \cdot 4(R-2) + 2 \cdot 4(T-2) + \underset{\text{coins}}{\underset{\uparrow}{4 \cdot 4}}$

$= 8R + 8T - 16$

D'où $V_{\text{Tore}}(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln W^{(0)}(C_T) = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{T} \cdot 8(R+T-2) \ln \frac{b_e}{b_1} = -8 \ln \frac{b_e}{b_1}$

Dans cette situation, la force de rappel entre les deux particules tend vers 0 : liberté asymptotique.