M2/CFP/Parcours de Physique Théorique

Invariances en physique et théorie des groupes

Mesure de Haar

1 Métrique, mesure d'intégration et Laplacien sur une variété

1) Soit un sous-groupe G de $GL(n,\mathbb{R})$, et g une matrice définissant une métrique sur la variété de ce groupe, i.e. $\| X \|^2 = {}^t X\, g\, X$. Donner la condition que doit satisfaire cette matrice g pour que la norme ainsi définie soit invariante sous les transformations de coordonnées $X \to T\, X = \widetilde{X}$ codées par les éléments T de G.

2) En déduire que la mesure invariante pour le volume est $\sqrt{\det G}\, d^n X$.

3) On reprend les questions précédentes en notations tensorielles. Sur une variété, considérons donc une métrique g, c'est-à-dire dans un certain choix de coordonnées (x^i) un tenseur g_{ij}. L'élément de longueur carrée est alors $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

a) Montrer que g_{ij} se transforme comme un tenseur **covariant** de façon à préserver ds^2.

b) Traduire en langage matriciel la relation de transformation du tenseur g_{ij} et retrouver le résultat de la question 1).

c) On définit $g = \det(g_{ij})$, qui n'est pas invariant par changement de coordonnées. Ecrire la mesure invariante pour le volume dans le système de coordonnées x^i.

4) Laplacien sur une variété

On pose $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$.

a) Comment se tranforme le tenseur g^{ij} sous changement de coordonnées ?

b) Montrer que le laplacien Δ défini par

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\, g^{ij} \sqrt{g}\, \frac{\partial}{\partial x^j}$$

est tel que la relation

$$\int d\mu(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\; g^{ij}\; \frac{\partial h(x)}{\partial x^j} = \int d\mu(x) f(x)(-\Delta)h(x)$$

est invariante par changement de coordonnées, pour tout couple de fonctions sur la variété de carré intégrable et décroissante suffisamment rapidement au bord.

5) Laplacien sur $\mathbb{R}^n$

On pose $\rho^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Montrer que

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\Delta_{Sph\grave{e}re\ S^{n-1}}$$

6) Mesure sur S^n.

a) Un vecteur de la sphère S^1 d'angle polaire ϕ_1 s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\vec{n}_1 = \cos\phi_1\,\vec{u}_1 + \sin\phi_1\,\vec{u}_2.$$

De même un vecteur de la sphère S^2 repéré par ses coordonnées sphériques ϕ_1, ϕ_2 s'écrit

$$\vec{n}_2 = \cos\phi_2\,\vec{u}_3 + \sin\phi_2\,\vec{n}_1\;,$$

où $\vec{u}_3$ est normal au plan $(\vec{u}_1,\,\vec{u}_2)$. Généraliser cette construction naturelle pour obtenir les coordonnées sphériques sur la sphère S^n.

b) En déduire l'expression de la métrique en coordonnées sphériques sur la sphère S^n.

c) Exprimer la mesure de l'aire sur la sphère S^n.

d) Montrer que la surface de la sphère S^{n-1} vaut

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,. \tag{1}$$

On utilisera l'astuce qui permet de calculer l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ par passage aux coordonnées polaires, que l'on généralisera à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,d^n x$. Ce résultat est extrêmement utile en régularisation dimensionnelle en théorie quantique des champs (n peut alors être non entier).

e) Retrouver les valeurs classiques de S_n et comparer avec le résultat déduit de 6-c).

2 Mesure sur le groupe $SU(2)$

7) Le groupe $SU(2)$ est isomorphe à la sphère S^3. La mesure de Haar sur $SU(2)$, groupe compact, est unique à un facteur près.

a) En déduire que la mesure sur $SU(2)$ (normalisée à celle sur S^3) s'écrit

$$d\mu(U) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\sin\theta\, d\psi\, d\theta\, d\phi\,, \tag{2}$$

(θ, ϕ) étant les angles polaires du vecteur unitaire $\vec{n}$ de S^2 qui caractérise l'axe de la rotation correspondante, et ψ l'angle de cette rotation.

b) Vérifier la normalisation de la mesure précédente.

8) Angles d'Euler

On reprend la question 7), cette fois dans la paramétrisation donnée par les angles d'Euler, dont on rappelle l'expression en termes des éléments du groupe $SU(2)$:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = U(\alpha, z)\, U(\beta, y)\, U(\gamma, z)\,. \tag{3}$$

a) Justifier précisément le fait que $SU(2)$ est en bijection avec le cube de $\mathbb{R}^3$ correspondant à $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 4\pi]$. Il sera utile de résoudre l'équation $U(\alpha, \beta, \gamma) = U(\alpha', \beta', \gamma')$.

b) Montrer que l'équation $U(\alpha, \beta, \gamma) = -U(\alpha', \beta', \gamma')$ possède une solution unique sur $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 4\pi]$, que l'on précisera. En déduire que $SO(3)$ est en bijection avec le cube de $\mathbb{R}^3$ correspondant à $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

c) Trouver un ensemble de relations entre les variables (ϕ, θ, ψ) et (α, β, γ).

d) Calculer la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(\phi, \theta, \psi)}\,.$$

e) En déduire que la métrique sur S^3 dans les variables (α, β, γ) s'écrit

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

f) Montrer que la mesure sur le groupe $SU(2)$ s'écrit

$$d\mu(U) = \frac{1}{8}\sin\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,. \tag{5}$$

9) Métrique invariante sur le groupe.

On se propose de retrouver les résultats précédents en partant directement d'une métrique invariante sur le groupe.

a) Montrer que

$$ds^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, dU\, dU^\dagger \tag{6}$$

définit une distance invariante à droite, à gauche et sous inversion.

b) Dans la paramétrisation usuelle de la question 6)d) en termes de $(\vec{n}(\theta,\phi)$ et ψ, exprimer l'élément de longueur invariante ds^2.

c) En déduire l'expression de la mesure correspondante sur le groupe $SU(2)$. Comparer au résultat (2).

d) Reprendre les deux questions précédentes dans la paramétrisation des angles d'Euler.

3 Mesure sur le groupe $U(n)$

10) Toute matrice unitaire $U \in U(n)$ peut se diagonaliser sous la forme

$$U = V\,\Lambda\, V^\dagger\,, \tag{7}$$

où $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

a) Montrer que les valeurs propres λ_j sont des phases que l'on écrira dans la suite sous la forme $\lambda_j = e^{i\alpha_j}$.

b) Pour Λ fixé, déterminer l'ensemble des matrices commutant avec Λ.

c) On cherche à coder $U(n)$. Les λ_j étant fixés (partie "radiale"), on doit ensuite coder la partie "angulaire". Montrer que les matrices V parcourent $U(n)/U(1)^n$.

11) Considérons la métrique naturelle sur le groupe, définie par $\mathrm{tr}(dU\, dU^\dagger)$. Elle est invariante à droite, à gauche, et sous inversion.

a) Montrer que

$$dU = V(d\Lambda + [dX, \Lambda])V^\dagger\,, \tag{8}$$

où $dX = V^\dagger\, dV$. Montrer que dX est antihermitienne et sans termes diagonaux.

b) En déduire que cette métrique s'écrit

$$\mathrm{tr}(dU\, dU^\dagger) = \sum_i |d\alpha_i|^2 + 2\sum_{i<j} |dX_{ij}|^2 |\lambda_i - \lambda_j|^2\,. \tag{9}$$

c) Donner l'expression du tenseur métrique $g_{\alpha,\beta}$ dans les coordonnées $\xi^\alpha = (\alpha_i,\, \mathcal{R}eX_{ij},\, \mathcal{I}mX_{ij})$.

d) En déduire que la mesure d'intégration s'écrit

$$d\mu(U) = const.|\Delta(e^{i\alpha})|^2 \prod d\alpha_i\, d\mu(V)\,, \tag{10}$$

où

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

(déterminant de Vandermonde), et vérifier que

$$|\Delta(e^{i\alpha})|^2 = const. \prod_{i<j} \sin^2 \left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}\right)\,. \tag{11}$$