Noël -

## Tenseur d'énergie-impulsion et tenseur de Belinfante

I 1) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum_i \varphi_i(x)\, j_i(x)$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial^\nu \varphi_i - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial^\nu \varphi_i - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_0 - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_1$$

donc $\| T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_1$

$$S = \int_\Omega \mathcal{L}_0\, d^4x + \int_\Omega \mathcal{L}_1\, d^4x = S_0 + S_1$$

dans la transformation globale $\begin{cases} \delta x^\nu = \text{cste} \\ \delta\varphi_i = 0 \end{cases}$, $S_0$ est invariant

$S_1$ est changé en

$$S_1' = \int_{\Omega'} \mathcal{L}_1 (\varphi_i'(x), x)\, d^4x = \int_{\Omega'} j_i(x)\, \varphi_i'(x)\, d^4x \qquad (j'(x') = j(x'))$$

$$\sim \int_\Omega j_i(x) \underbrace{(\bar\delta\varphi_i(x) + \varphi_i(x))\, d^4x}_{1} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} d^3\sigma_\mu\, \delta x^\mu\, j_i(x)\, \varphi_i(x)}_{2} \quad \text{à l'ordre 1}$$

avec $\bar\delta\varphi_i = \underbrace{\delta\varphi_i}_{0 \text{ ici}} - \delta x_\nu\, \partial^\nu \varphi_i$

$$1 \sim \underbrace{\int_\Omega j_i(x)\, \varphi_i(x)\, d^4x}_{S_1} - \int_\Omega j_i(x) (\delta x_\nu\, \partial^\nu \varphi_i)\, d^4x$$

$$1 - S_1 = \int_\Omega \partial^\nu (j_i(x)\, \delta x_\nu)\, \varphi_i(x)\, d^4x - \int_\Omega \partial^\nu (j_i(x)\, \delta x_\nu \varphi_i(x))\, d^4x$$

$$= \int_\Omega (\partial^\nu j_i(x))\, \varphi_i(x)\, \delta x_\nu\, d^4x - \int_{\partial\Omega} j_i(x)\, \varphi_i(x)\, \delta x^\mu\, d^3\sigma_\mu$$

d'où

$$S' - S = S_1' - S_1 = 1 + 2 - S_1 = \int_\Omega (\partial^\nu j_i(x))\, \varphi_i(x)\, \delta x_\nu\, d^4x = 2\,!$$

Comme d'autre part $S' - S = -\int_{\partial\Omega} d^3\sigma_\mu \, T^{\mu\nu} \delta x_\nu$

$= -\int_\Omega d^4x \, \partial_\mu T^{\mu\nu} \delta x_\nu$ ,

On a donc, puisque le résultat est vrai pour tout $\Omega$ et tout $\delta x_\nu$,

$$\| \partial_\mu T^{\mu\nu} = -(\partial^\nu j_i(x))\varphi_i(x)$$

d'où $\partial_\mu T_0^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \partial^\nu \mathcal{L}_1$

$= -(\partial^\nu j_i(x))\varphi_i(x) + (\partial^\nu \varphi_i(x)) j_i(x) + \varphi_i(x)\partial^\nu j_i(x)$

$$\| \partial_\mu T_0^{\mu\nu} = (\partial^\nu \varphi_i(x)) j_i(x)$$

2.) $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\nu A^\nu = -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - j_\nu A^\nu$

<u>rappel</u>: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = -j_\nu$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange : $\| \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ $\rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{j} \end{array}\right.$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & -B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

($\triangle$ : par habitude, $E_i = E^i$ sont les composantes <u>contra</u>variantes du 3-vecteur $\vec{E}$)

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \to \vec{B} \\ \vec{B} \to -\vec{E} \end{array} \right. \Big\downarrow$

$$F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{avec convention } \Sigma \, ? : \ \varepsilon_{0123} = -1} F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\| \partial^*_\mu F^{\mu\nu} = 0$

(par antisymétrie)

$\rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0 \end{array}\right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{00} = F^{00} = 0 \\ F_{0i} = -F_{i0} = E^i \\ F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k \end{array} \right.$$

donc $\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}}_{-\frac{1}{4}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijk'} B^k B^{k'} = -\frac{1}{2}\vec{B}^2} \underbrace{-\frac{1}{4} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F^{i0} F_{i0}}_{-\frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} = \frac{1}{2} F^{0i} F^{0i} = \frac{1}{2}\vec{E}^2} - j_0 A^0 - j_i A^i$

d'où $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - eV + \vec{j}\cdot\vec{A}$

$$T^\mu{}_\nu = -\mathcal{L}\,\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial_\nu A_\rho = -\mathcal{L}\,\delta^\mu{}_\nu - F^{\mu\rho}\partial_\nu A_\rho$$

$$\| T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4} g^\mu{}_\nu F^2 + g^\mu{}_\nu\, j.A - F^{\mu\rho}\partial_\nu A_\rho$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\partial^\nu F^2 + \partial^\nu (j.A) - \partial_\mu(F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial^\nu F^{\mu\rho}) F_{\mu\rho} + (\partial^\nu j^\mu) A_\mu + \underbrace{j^\mu \partial^\nu A_\mu - \underbrace{(\partial_\mu F^{\mu\rho})}_{j^\rho} \partial^\nu A_\rho}_{\downarrow\, 0} - F^{\mu\rho}(\partial_\mu \partial^\nu A_\rho)$$

$$-F^{\mu\rho}(\partial_\mu \partial^\nu A_\rho) = -\frac{1}{2} F^{\mu\rho}\partial^\nu(\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) = -\frac{1}{2} F^{\mu\rho}\partial^\nu F_{\mu\rho}$$

d'où $\| \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\partial^\nu j^\mu) A_\mu$ en accord avec la question 1)

(ici $\mathcal{L}_1 = -j.A$)

<u>symétrie de $T^{\mu\nu}$</u> :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^2 + g^{\mu\nu} j.A - F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho$$

$$T^{\nu\mu} = \underbrace{\frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^2 + g^{\mu\nu} j.A}_{\text{partie identique}} - F^{\nu\rho}\partial^\mu A_\rho$$

$$-F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho = -(\partial^\mu A^\rho - \partial^\rho A^\mu)\partial^\nu A_\rho = -\partial^\mu A^\rho \partial^\nu A_\rho + \partial^\rho A^\mu \partial^\nu A_\rho$$

$$-F^{\nu\rho}\partial^\mu A_\rho = -(\partial^\nu A^\rho - \partial^\rho A^\nu)\partial^\mu A_\rho = -\partial^\nu A^\rho \partial^\mu A_\rho + \partial^\rho A^\nu \partial^\mu A_\rho$$

Ainsi $T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = (\partial^\rho A^\mu)(\partial^\nu A_\rho) - (\partial^\rho A^\nu)(\partial^\mu A_\rho) \neq 0$

<u>Trace:</u> $T^\mu{}_\mu = \frac{1}{4} g^\mu{}_\mu F^2 + g^\mu{}_\mu\, j \cdot A \underbrace{- F^{\mu\rho}\partial_\mu A_\rho}_{\frac{1}{2}F^{\mu\rho}(\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) = \frac{1}{2}F^2}$

$= F^2 + 4 j A - \frac{1}{2}F^2 = \frac{1}{2}F^2 + 4 j \cdot A$

donc $T^\mu{}_\mu \neq 0$ même en l'absence de sources.

3) $T^0{}_0 = -F^{0i}\partial_0 A_i - \mathcal{L} = -E^i \frac{\partial}{\partial t} A^i - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \rho V - \vec{j}\,\vec{A}$

or $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{\nabla} V$

donc $T^0{}_0 = \vec{E}^2 + \vec{E}\cdot\vec{\nabla} V - \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2 + \rho V - \vec{j}\,\vec{A}$

$= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{E}\cdot\vec{\nabla} V + \rho V - \vec{j}\cdot\vec{A}$

$= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{E} V) - \vec{j}\,\vec{A}$ car $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$

Dans le cas d'un champ libre, on ne retrouve pas la densité usuelle $\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ : il apparait un terme supplémentaire $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}V)$. De ce fait, $T^0{}_0$ n'est pas définie positive et ne peut donc pas être interprétée comme une densité d'énergie. En revanche, lorsque l'on calcule l'énergie totale, $\int_{\text{espace}} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}V\, d^3x = 0$ d'après le théorème de Gauss, pour des champs s'annulant rapidement à l'infini.

4) $T^{0i} = -T^{0}{}_{i} = F^{0j}\partial_i A_j = -E^j(-\nabla^i A^j) = \vec{E}\cdot\partial_i\vec{A}$

or $(\vec{E}\wedge\vec{B})^i = \epsilon_{ijk}E^j B^k = \epsilon_{ijk}E^j\partial^{i}_{k'}A^{k''}\epsilon_{kk'k''}$ car $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

soit $B^k = \epsilon_{kk'k''}\partial_{k'}A^{k''} = -\epsilon_{kk'k''}\partial^{k'}A^{k''}$

$$= -\underset{\substack{k'=j\\k''=i}}{E^j\partial_j A^i} + \underset{\substack{k'=i\\k''=j}}{E^j\partial_i A^j}$$

soit $(\vec{E}\wedge\vec{B})^i = -\vec{E}\cdot\vec{\nabla}A^i + \vec{E}\cdot\partial_i\vec{A}$

ainsi $\| T^{0i} = (\vec{E}\wedge\vec{B})^i + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}A^i \neq (\vec{E}\wedge\vec{B})^i$ même en absence de sources

$$\int T^{0i}\,d^3x = \int(\vec{E}\wedge\vec{B})^i\,d^3x + \underbrace{\int\vec{E}\cdot\vec{\nabla}A^i\,d^3x}$$

$$\underbrace{\int\vec{\nabla}(\vec{E}A^i)\,d^3x}_{=0} - \int\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\rho}A^i\,d^3x$$

pour des champs rapidement décroissant à l'$\infty$

$\rightarrow$ contribution nulle en absence de source

Donc $\int T^{0i}\,d^3x = \int(\vec{E}\wedge\vec{B})^i\,d^3x$ est bien égal à l'intégrale sur l'espace du vecteur de Poynting.

5) invariance de jauge:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2 + g^{\mu\nu}j\cdot A - F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho$$

Sous la transformation de jauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\phi$,

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{g^{\mu\nu}}{2}F^{\rho\sigma}(\partial_\rho\partial_\sigma\phi)}_{0} + g^{\mu\nu}j\cdot\partial\phi - F^{\mu\rho}\partial^\nu\partial_\rho\phi$$

Le terme supplémentaire n'est pas nul, même en l'absence de source. Il peut s'écrire comme une divergence totale dans le cas $j=0$:

$$g^{\mu\nu}j\cdot\partial\phi - F^{\mu\rho}\partial^\nu\partial_\rho\phi = g^{\mu\nu}\underbrace{\partial_\rho j^\rho}_{0\text{ par conservation de } j}\phi + g^{\mu\nu}j\cdot\partial\phi - F^{\mu\rho}\partial_\rho\partial^\nu\phi$$

$$= \partial_\rho (g^{\mu\nu} j^\rho \phi) - \partial_\rho F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi + \underbrace{\partial_\rho F^{\mu\rho}}_{-j^\mu} \partial^\nu \phi - F^{\mu\rho} \partial_\rho \partial^\nu \phi$$

$$= \underbrace{\partial_\rho \left( g^{\mu\nu} j^\rho \phi - F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi \right)}_{\text{divergence totale}} - j^\mu \partial^\nu \phi$$

→ ne contribue pas lorsque l'on calcule les charges associées, pour des champs rapidement décroissants à l'infini.

## II - Tenseur de Belinfante

1) $\varphi'_a(x') = S(\Lambda)_{ab} \varphi_b(x)$ $\qquad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \delta x_\nu = \omega_{\nu\rho} x^\rho$

donc $\delta \varphi_a(x) = S(\Lambda)_{ab} \varphi_b(x) - \varphi_a(x) = (S(\Lambda)_{ab} - \delta_{ab}) \varphi_b(x)$

$S(\Lambda)_{ab} - \delta_{ab} = \omega^{\nu\rho} B_{\nu\rho ab}$ où $B_{\nu\rho ab}$ est antisymétrique en $\nu\rho$

D'après le théorème de Noether, le courant

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a - T^{\mu\nu} \delta x_\nu$$ est conservé, donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} (S(\Lambda)_{ab} - \delta_{ab}) \varphi_b(x) - T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} B^{\nu\rho}{}_{ab}\, \omega_{\nu\rho} \varphi_b(x) - T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} B^{\nu\rho}{}_{ab} \varphi_b(x) + x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} \right] \omega_{\nu\rho}$$

est conservé pour tout tenseur $\omega_{\nu\rho}$ antisymétrique.

Ainsi $\| J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} B^{\nu\rho}{}_{ab} \varphi_b(x)$ est conservé

Il est de la forme $J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + \underbrace{\Delta^{\mu\nu\rho}}_{\text{antisymétrique en } \nu \text{ et } \rho}$

* $x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}$ correspond à la partie moment angulaire orbital
* $\Delta^{\mu\nu\rho}$ correspond à la partie de spin

2) Cas du champ électromagnétique :

dans ce cas $S(\Lambda)^\lambda{}_\sigma = \Lambda^\lambda{}_\sigma$

$$S(\Lambda)^\lambda{}_\sigma - \delta^\lambda_\sigma = \omega^\lambda{}_\sigma \quad \text{donc } B_{\nu\rho}{}^\lambda{}_\sigma = \frac{1}{2}(g_{\rho\sigma} g^\lambda{}_\nu - g_{\nu\sigma} g^\lambda{}_\rho)$$

$$\text{car} \quad \omega^{\nu\rho} \frac{1}{2}(g_{\rho\sigma} g^\lambda{}_\nu - g_{\nu\sigma} g^\lambda{}_\rho)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^\lambda{}_\sigma + \underbrace{\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu}}_{\text{car } \omega^{\nu\rho} = -\omega^{\rho\nu}} g_{\nu\sigma} g^\lambda{}_\rho = \frac{1}{2}(\omega^\lambda{}_\sigma + \omega^\lambda{}_\sigma) = \omega^\lambda{}_\sigma$$

$$2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} B^{\nu\rho\lambda}{}_\sigma A^\sigma = -2F^\mu{}_\lambda B^{\nu\rho\lambda}{}_\sigma A^\sigma$$

$$= -F^\mu{}_\lambda (g^\rho{}_\sigma g^{\lambda\nu} - g^\nu{}_\sigma g^{\lambda\rho}) A^\sigma$$

$$\text{soit } \| \Delta^{\mu\nu\rho} = -F^{\mu\nu} A^\rho + F^{\mu\rho} A^\nu$$

ou directement à partir de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \delta A^\nu = -F^\mu{}_\nu \omega^{\nu\rho} A_\rho = (-F^\mu{}_\nu A_\rho + F^\mu{}_\rho A_\nu) \frac{\omega^{\nu\rho}}{2}$$

3) $\partial_\mu J^{\mu,\nu\rho} = 0 = \partial_\mu (x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}) + \partial_\mu \Delta^{\mu\nu\rho}$

$$= T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} + \partial_\mu \Delta^{\mu\nu\rho}$$

donc $\| T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} = -\partial_\mu \Delta^{\mu\nu\rho}$ (en absence de sources)

On retrouve le fait que $T^{\nu\rho}$ est symétrique dans le cas d'un champ scalaire.

4) $J'^\mu = J^\mu + \partial_\rho X^{\rho\mu}$

donc $\partial_\mu J'^\mu = \partial_\mu J^\mu + \underbrace{\partial_\mu \partial_\rho X^{\rho\mu}}$

0 car $X^{\rho\mu}$ est antisymétrique

ainsi $\partial_\mu J'^\mu = \partial_\mu J^\mu = 0$

$$Q' = \int d^3x\, J'^0 = \int d^3x\, J^0 + \int d^3x\, \partial_\rho X^{\rho 0}$$

$$\int d^3x\, \partial_\rho X^{\rho 0} = \int d^3x\, \partial_i X^{i0}$$ (car $X^{\rho\mu}$ est antisymétrique donc $X^{00} = 0$)

$= 0$ par Stokes ($X^{i0}$ rapidement décroissant à l'$\infty$)

5) $T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$ $\quad X^{\rho\mu\nu}$ antisymétrique en $\rho$ et $\mu$

D'après la question précédente, $T'^{\mu\nu}$ est donc conservé et les charges associées sont identiques.

$$T'^{\nu\rho} - T'^{\rho\nu} = \underbrace{T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu}}_{-\partial_\mu \Delta^{\mu\nu\rho}} + \partial_\mu X^{\mu\nu\rho} - \partial_\mu X^{\mu\rho\nu} = \partial_\mu \underbrace{[X^{\mu\nu\rho} - X^{\mu\rho\nu} - \Delta^{\mu\nu\rho}]}_{0 \text{ par hypothèse}}$$

ainsi <u>$T'^{\mu\nu}$ est symétrique</u>

6) $X^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\nu\rho} - \Delta^{\nu\mu\rho} - \Delta^{\rho\mu\nu})$

. $X^{\mu\nu\rho}$ est antisymétrique en $\mu$ et $\nu$ : . $\Delta^{\mu\nu\rho} - \Delta^{\nu\mu\rho}$ est antisymétrique en $\mu$ et $\nu$

. $\Delta^{\rho\mu\nu}$ est antisymétrique en $\mu$ et $\nu$

$$. X^{\mu\nu\rho} - X^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\nu\rho} - \Delta^{\nu\mu\rho} - \Delta^{\rho\mu\nu} - \Delta^{\mu\rho\nu} + \Delta^{\rho\mu\nu} + \Delta^{\nu\mu\rho})$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\nu\rho} - \Delta^{\mu\rho\nu}) = \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\nu\rho} + \Delta^{\mu\nu\rho}) = \Delta^{\mu\nu\rho}$$

Les conditions pour $X^{\mu\nu\rho}$ sont donc satisfaites.

<u>rem</u>: on peut vérifier qu'en posant $J'^{\rho,\nu\rho} = x^\nu T'^{\mu\rho} - x^\rho T'^{\mu\nu}$, la charge associée à $J'^{\mu,\nu\rho}$ est la même que celle associée à $J^{\mu,\nu\rho}$

7) Dans le cas du champ électromagnétique,

$$X^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(-F^{\mu\nu}A^\rho + F^{\mu\rho}A^\nu + F^{\nu\mu}A^\rho - F^{\nu\rho}A^\mu - A^\mu F^{\rho\nu} + A^\nu F^{\rho\mu})$$

$$= -F^{\mu\nu}A^\rho$$

Donc $T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \partial_\rho[F^{\rho\mu}A^\nu]$

$$= T^{\mu\nu} + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu - j^\mu A^\nu$$

or $T^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu}F^2 + j\cdot A\, g^{\mu\nu}$

donc $T'^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu}F^2 + j\cdot A\, g^{\mu\nu} + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu - j^\mu A^\nu$

$$-F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu = F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu$$

d'où $\| \; T'^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu}F^2 + j\cdot A\, g^{\mu\nu} - j^\mu A^\nu$

<u>Symétrie:</u> $T'^{\mu\nu} - T'^{\nu\mu} = F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu \underbrace{-F^{\nu\rho}F_\rho{}^\mu} - j^\mu A^\nu + j^\nu A^\mu$

$$F^{\rho\nu}F_\rho{}^\mu$$
$$= F_\rho{}^\nu F^{\rho\mu}$$
$$= -F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu$$

donc $T'^{\mu\nu} - T'^{\nu\mu} = j^\nu A^\mu - j^\mu A^\nu = 0$ dans le vide.

On peut obtenir le résultat précédent d'une manière plus générale:

Considérons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ $\qquad \mathcal{L}_1 = \sum_a j_a(x)\varphi_a(x)$

Sous la transformation $\left| \begin{array}{l} \delta x_\nu = \omega_{\nu\rho}x^\rho \\ \delta\varphi_a(x') = (S(\Lambda)_{ab} - \delta_{ab})\varphi_b(x) = \omega_{\nu\rho} B^{\nu\rho}{}_{ab}\varphi_b(x) \end{array} \right.$

l'action $S_0 = \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}_0$ est invariante

$$S_1 \to S_1' = \int_{\Omega'} j_a(x)\varphi_a'(x)\, d^4x$$

$$\varphi_a'(x) = \bar\delta\varphi_a(x) + \varphi_a(x) = \omega_{\nu\rho}B^{\nu\rho}{}_{ab}\varphi_b(x) - \omega_{\nu\rho}x^\rho\partial^\nu\varphi_a(x) + \varphi_a(x)$$

donc $S_1' = S_1 + \omega_{\nu\rho}\int_\Omega j_a B^{\nu\rho}{}_{ab}\varphi_b\, d^4x - \omega_{\nu\rho}\int_\Omega j_a x^\rho\partial^\nu\varphi_a\, d^4x$

$$+ \omega_{\nu\rho}\int d^3\sigma^\nu x^\rho j_a(x)\varphi_a(x)$$

En intégrant par partie le 3ème terme, le terme tout intégré se compense avec le 4ème terme. Il reste:

$$S'_1 - S_1 = \omega_{\nu\rho} \int_\Omega \left[ j_a(x) B^{\nu\rho}{}_{ab}\, \varphi_b(x) \quad + \partial^\nu (j_a(x)\, x^\rho)\, \varphi_a(x) \right] d^4x$$

$$\omega_{\nu\rho}\, \partial^\nu (j_a(x)\, x^\rho) = \frac{\omega_{\nu\rho}}{2}\left[\partial^\nu (j_a(x) x^\rho) - \partial^\rho (j_a(x) x^\nu)\right]$$

$$= \frac{\omega_{\nu\rho}}{2}\left[x^\rho \partial^\nu j_a(x) - x^\nu \partial^\rho j_a(x)\right]$$

D'autre part, $S' - S = S'_1 - S_1 = \frac{\omega_{\nu\rho}}{2}\int_\Omega d^4x\, \partial_\mu J^{\mu,\nu\rho}$

d'où $\| \partial_\mu J^{\mu,\nu\rho} = 2 j_a(x)\, B^{\nu\rho}{}_{ab}\, \varphi_b(x) + (x^\rho \partial^\nu j_a(x) - x^\nu \partial^\rho j_a(x))\, \varphi_a(x)$

$$J^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + S^{\mu\nu\rho}$$

donc $\partial_\mu J^{\mu,\nu\rho} = T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} + x^\nu \partial_\mu T^{\mu\rho} - x^\rho \partial_\mu T^{\mu\nu} + \partial_\mu S^{\mu\nu\rho}$

$$= T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} - x^\nu (\partial^\rho j_a)\, \varphi_a + x^\rho (\partial^\nu j_a)\, \varphi_a + \partial_\mu S^{\mu\nu\rho}$$

car $\partial_\mu T^{\mu\nu} = -(\partial^\nu j_a(x))\, \varphi_a(x)$ (cf. 1)).

En combinant les deux résultats précédents, on obtient

$$T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} = -\partial_\mu S^{\mu\nu\rho} + 2 j_a B^{\nu\rho}{}_{ab} \varphi_b$$

$$= -2 \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} B^{\nu\rho}{}_{ab}\, \varphi_b + 2 j_a B^{\nu\rho}{}_{ab}\, \varphi_b$$

$$\| \; T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} = 2\left[ j_a - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)}\right] B^{\nu\rho}{}_{ab}\, \varphi_b$$

donc $T'^{\nu\rho} - T'^{\rho\nu} = T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} + \partial_\mu (X^{\mu\nu\rho} - X^{\mu\rho\nu})$

$$= 2 j_a B^{\nu\rho}{}_{ab}\, \varphi_b \qquad \text{(voir 5))}$$

Dans le cas du champ électromagnétique, $\mathcal{L}_{int} = -j^\mu A_\mu$

et en utilisant la forme obtenue pour $B^{\nu\rho\lambda\sigma}$, on a

$$T'^{\nu\rho} - T'^{\rho\nu} = -j_\lambda \left(g^{\rho\sigma} g^{\lambda\nu} - g^{\nu\sigma} g^{\lambda\rho}\right) A_\sigma = -j^\nu A^\rho + j^\rho A^\nu$$

c.q.f.d

Trace de $T'^{\mu\nu}$.

$$T'^\mu{}_\mu = \underbrace{F^{\mu\rho} F_{\rho\mu} + \frac{1}{4} g^\mu{}_\mu F^2}_{0} + g^\mu{}_\mu j \cdot A - j \cdot A = 3 j \cdot A$$

Donc $T'^\mu{}_\mu = 0$ en l'absence de sources

8) Sous la transformation de jauge $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \phi$.

$$T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \partial_\rho (g^{\mu\nu} j^\rho \phi - F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi) - j^\mu \partial^\nu \phi \qquad (\text{cf I } 5))$$

Or $T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho \left(F^{\mu\rho} A^\nu\right)$

$$F^{\mu\rho} A^\nu \longrightarrow F^{\mu\rho} A^\nu + F^{\mu\rho} \partial^\nu \phi \quad \text{sous la transformation de jauge}$$

Donc en absence de source, $T'^{\mu\nu}$ est invariant de jauge.

En présence de source, $T'^{\mu\nu} \to T'^{\mu\nu} + \partial_\rho (g^{\mu\nu} j^\rho \phi) - j^\mu \partial^\nu \phi$

$$= T'^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} j^\rho \partial_\rho \phi - j^\mu \partial^\nu \phi$$

Ceci est dû au fait que le système est ouvert: il faut prendre en compte la dynamique des sources.

9) L'action d'une particule relativiste s'écrit

$S = -\int m \, d\tau$ dont l'équation du mouvement est $\dfrac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = 0$

L'action $S = -\int \frac{m}{2} \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau = -\int \frac{m}{2} \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} d\tau$

conduit aux mêmes équations du mouvement :

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}_\mu} = \frac{\delta L}{\delta x_\mu} \quad \text{donne} \quad -m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \text{, i.e} \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

$$\left(\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}\right)$$

Dans le cas de plusieurs particules, $S_{mat} = -\sum_n \int d\tau_n \frac{m_n}{2}\left[\frac{dx_n(\tau_n)}{d\tau_n}\right]^2$

($\tau_n$ = temps propre de la particule $n$)

soit encore : $S_{mat} = -\int d^4x \sum_n \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \frac{m_n}{2}\left[\frac{dx_n}{d\tau_n}\right]^2 d\tau_n$

Sous cette forme, les équations du mouvement peuvent s'obtenir par variation de $S_{mat}$ par rapport aux champs $x_n$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu x_n^\nu)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_n^\nu} \quad \text{s'écrit , en utilisant} \quad \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} = \frac{\partial x_n^\nu}{\partial x^\mu}\frac{dx_\mu}{d\tau_n} :$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu x_n^\nu)} = -\int m_n \frac{dx^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_{n\nu}}{d\tau_n}\delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d\tau_n$$

$$\text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\delta(\partial_\mu x_n^\nu)}\mathcal{L} = -\int m_n \frac{d^2x_{n\nu}}{d\tau_n^2}\delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d\tau_n = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_n^\nu} = 0$$

$$\text{car} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\frac{dx_\mu}{d\tau_n}}\frac{d}{d\tau_n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau_n} = \frac{d}{d\tau_n}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d^2x_n^\nu}{d\tau_n^2} = 0$$

<u>tenseur énergie-impulsion :</u>

L'action $S = S_A + S_{mat} + S_{int}$

$$= \int -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^4x - \sum_n \int d\tau_n \frac{m_n}{2}\dot{x}_n(\tau_n)^2 - \sum_n \int d\tau_n\, e_n\, \dot{x}_n(\tau).A(x_n)$$

tient compte de la dynamique du champ, des sources, et du couplage.

rappel : $j^\mu_{e.m} = \rho \dfrac{dx^\mu}{dt} = (\rho, \vec{J}_{e.m})$ avec $\vec{J}_{e.m} = \rho \vec{v}$

$$\rho = \sum_n e_n \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(\tau_n))$$

donc $$j^\mu_{e.m} = \sum_n e_n \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(\tau_n)) \left.\frac{dx^\mu_n}{dt}\right|_{t = x^0_n(\tau_n)}$$

$$= \sum_n \int dt\, e_n \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_n(\tau_n))\, \delta(t - x^0_n(\tau_n)) \frac{dx^\mu_n}{dt}$$

$$= \sum_n e_n \int d\tau_n \frac{dt}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \frac{dx^\mu_n}{dt}$$

soit $$j^\mu_{e.m} = \sum_n e_n \int d\tau_n \underbrace{\frac{dx^\mu_n}{d\tau_n}}_{u^\mu_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n))$$

On a donc bien $$S_{int} = -\sum_n \int d\tau_n\, e_n \dot{x}_n(\tau) \cdot A(x_n)$$

$$= -\sum_n \int d\tau_n\, e_n \dot{x}_n(\tau_n) \cdot A(x_n) \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d^4x$$

$$= -\int j_{e.m} \cdot A\, d^4x$$

Considérons la transformation :

$$\begin{cases} \delta A^\mu = 0 \\ \delta x^\mu = \text{cste} \\ \delta x^\mu_n = \delta x^\mu \end{cases}$$

Elle laisse l'action $S$ invariante

$$T^{\mu\nu}_{tot} = \underbrace{T^{\mu\nu}_A} + T^{\mu\nu}_{int} + \tilde{T}^{\mu\nu}_{mat} + \tilde{T}^{\mu\nu}_{int}$$

$T^{\mu\nu}_A$ et $T^{\mu\nu}_{int}$ s'obtiennent par variation de $S_A$ et $S_{int}$ par rapport à $A^\rho$, soit $-F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + g^{\mu\nu} j.A$
$= T^{\mu\nu}_A + T^{\mu\nu}_{int} = T^{\mu\nu}$

$\tilde{T}^{\mu\nu}_{mat}$ et $\tilde{T}^{\mu\nu}_{int}$ " " " " $S_{mat}$ et $S_{int}$ " " à $x_n$ :

$$\tilde{J}^\mu_{mat} = -\int \sum_n m_n \frac{dx^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_{n\rho}}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d\tau_n \left[\delta x^\rho - \frac{\partial x_n^\rho}{\partial x^\nu} \delta x^\nu\right]$$

or $\dfrac{dx^\mu}{d\tau_n}\dfrac{\partial x_n^\rho}{\partial x^\nu} = \dfrac{dx_n^\rho}{d\tau_n} g^\mu_\nu$

donc $\tilde{J}^\mu_{mat} = -\int \sum_n m_n \dot{x}_n^\mu \dot{x}_n^\nu \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d\tau_n\, \delta x_\nu$

De même $\tilde{J}^\mu_{int} = -\sum_n \int d\tau_n\, e_n \dfrac{dx^\mu}{d\tau_n} A_\rho(x_n)\, \delta^4(x - x_n(\tau))$

$\cdot\left(\delta x^\rho - \dfrac{\partial x_n^\rho}{\partial x^\nu}\delta x^\nu\right) - g^{\mu\nu}\sum_n \int d\tau_n\, e_n \dfrac{dx_n^\rho}{d\tau_n} A_\rho(x_n)$

$= -\sum_n \int d\tau_n\, e_n \dfrac{dx^\mu}{d\tau_n} A_\rho(x)\, \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, \delta x^\rho = -j^\mu A_\rho \delta x$

D'où $\tilde{T}^{\mu\nu} = +\sum_n m_n \dot{x}_n^\mu \dot{x}_n^\nu \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d\tau_n + j^\mu A^\nu$

Au total, $T'^{\mu\nu}_{tot} = T^{\mu\nu} + \tilde{T}^{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)}_{-j^\mu A^\nu + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu}$

$= -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + g^{\mu\nu} jA + \sum_n \int m_n \dot{x}_n^\mu \dot{x}_n^\nu \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d\tau_n$

$+ j^\mu A^\nu - j^\mu A^\nu + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu$

Soit $\boxed{T'^{\mu\nu}_{tot} = F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + \sum_n \int m_n \dot{x}_n^\mu \dot{x}_n^\nu \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, d\tau_n}$

qui est conservé, symétrique, et invariant de jauge.