Cinématique relativiste

ex 1 : vitesse relative

Dans le référentiel où l'une des particules est au repos,

$$p\cdot q = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1-v^2}} \qquad \text{avec } v = \text{vitesse relative}$$

($p = (m_1, 0)$ $\quad q = \left(\frac{m_2}{\sqrt{1-v^2}}, \vec{q}\right)$ par exemple, dans le référentiel où 1 est au repos).

d'où $\boxed{v = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p\cdot q)^2}}}$ $\qquad$ avec $\left|\begin{array}{l} m_1^2 = p^2 \\ m_2^2 = q^2 \end{array}\right.$

Comme $p\cdot q$ est un scalaire de Lorentz, cette expression a la même valeur dans tout référentiel, ce qui permet de calculer la vitesse relative sans avoir à effectuer de transformation de Lorentz

ex 2 : Expériences de cible fixe et collisionneurs

1. Dans le centre de masse, $E^* = \sqrt{(p_1+p_2)^2}$ $\qquad$ ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ dans ce référentiel)

$$= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1\cdot p_2}$$

$p_1 p_2 = mE$ (calcul dans le référentiel où 1 est au repos)

$$= \sqrt{2m^2 + 2mE} = \sqrt{4m^2 + 2mK}$$

2. On a maintenant $E^* = 2(m + K^*)$ $\qquad$ (énergie totale)

Pour avoir la même énergie dans le centre de masse, il faut donc que $2(m+K^*) = \sqrt{4m^2 + 2mK}$

soit $8mK^* + 4m^2 + 4K^{*2} = 4m^2 + 2mK$ $\quad \Rightarrow \boxed{K = 4K^* + \frac{2K^{*2}}{m}}$

cas non relativiste : $K^* \ll m$ $\qquad$ dans ce cas la vitesse de la particule incidente doit être 2 fois plus grande dans une expérience de cible fixe, d'où une énergie 4 fois plus grande.

lorsque $K^* \gg m$, ce facteur augmente très fortement (il vaut $4\left(1 + \frac{K^*}{2m}\right)$).

Dans les expériences de cible fixe, on ne peut donc pas atteindre des valeurs de E^* très élevées.

A.N : à RHIC $k^* = 100$ GeV/nucléon donc $k = 4.100.207$. $\left(1+\frac{100}{2}\right)$

donc $\frac{k}{m} = \frac{4k^*}{m} + \frac{2k^{*2}}{m^2} = \frac{4k^*}{m}\left(1+\frac{1}{2}\frac{k^*}{m}\right) = 4.100\,(1+50)$

$= 20400$ GeV/nucléon $= 20,4$ TeV/nucléon !

Même le LHC, en construction au CERN, n'atteindra pas cette énergie (l'énergie nominale prévue est de 7 TeV par charge, soit, pour $^{82}_{207}Pb$, une énergie par nucléon de 2,76 TeV/nucléon).

3- $p_1 \simeq (E_1, E_1)$
$p_2 = (E_2, -E_2)$

$E^* = \sqrt{(p_1+p_2)^2} = \sqrt{2p_1.p_2} = \sqrt{2E_1E_2 + 2E_1E_2} = 2\sqrt{E_1E_2}$

A.N à HERA, $E^* \simeq 310$ GeV

ex3 Photoproduction de pions

$\gamma(k) + p(P) \to \pi^0(q) + p$

1- rappel : dans le référentiel du centre de masse, $(\sum p_i)^2 = (\sum E_i)^2 = E^{*2}$
particules produites

or $E_i = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2} \geq m_i$

donc $E^{*2} \geq (\sum m_i)^2$ soit $E^* \geq \sum m_i$ (égalité pour $\vec{p}_i = 0$ $\forall i$)

Donc l'énergie totale minimale (seuil de réaction) est égale à $\sum m_i$.

Ici, $E^* \geq M+m$. Or $E^{*2} = (P+k)^2 = M^2 + 2P.k$

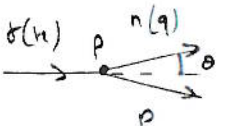
Dans le référentiel dans lequel le proton est au repos, $P.k = Mk^0$.

D'où $M^2 + 2Mk^0 \geq (M+m)^2 = M^2 + 2Mm + m^2$ || $k^0 \geq m + \frac{m^2}{2M} = 144,7$ MeV

(on retrouve la limite de masse M infinie)

2- Conservation de l'énergie-impulsion : $(P+k-q)^2 = M^2$

donc $\underbrace{k^2}_{0} + \underbrace{(P-q)^2}_{M^2 - 2Pq + m^2} + 2k.(P-q) = M^2$ soit $2k.(P-q) = 2P.q - m^2$



dans le référentiel où le proton est au repos :

$2k.(P-q) = 2k^0(M-q^0) + 2k^0|\vec{q}|\cos\theta = 2Mq^0 - m^2$

3_ Dans la limite où le proton est infiniment lourd, $M \gg m, k^0$

La relation $2k^0(M-q^0) + 2k^0|\vec{q}|\cos\theta = 2Mq^0 - m^2$ se réduit alors à $2Mk^0 = 2Mq^0$

soit $\underline{k^0 = q^0}$

ce qui traduit le fait que toute l'énergie du photon est transférée au pion.

L'énergie de seuil est m.

4_ La condition $E^* > M + m$ s'écrit, puisque $E^{*2} = M^2 + 2P.k$,

$$M^2 + 2P.k > M^2 + 2Mm + m^2 \quad \text{soit} \quad 2P.k > 2mM + m^2$$

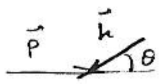
Le proton et le photon vont en sens inverse, donc $P.k = E.k^0 - \vec{p}.\vec{k} = Ek^0 + p.k^0$

$$\text{donc la condition est} \quad E + p > \frac{2Mm + m^2}{2k^0}$$

$k \ll m$, donc $E + p \gg M$, soit $p \simeq E$. On a alors $E > \dfrac{2Mm + m^2}{4k^0} \simeq 7.10^{19}\,eV$

On peut facilement vérifier que dans le cas où la collision n'est pas frontale,

$P.k = Ek^0 + pk^0\cos\theta < (E+p)k^0$



$$Ek^0 + pk^0\cos\theta > mM + \frac{m^2}{2} \quad p \sim E \Rightarrow \quad E > \frac{2Mm + m^2}{2(1+\cos\theta)k^0} > E^{seuil}_{coll.\,frontale}$$

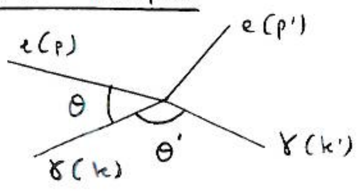
Dans ce cas l'énergie seuil de la réaction est plus élevée que dans le cas frontal.

Comme le proton entre en collision avec de nombreux photons du rayonnement cosmologique, $E^{seuil}_{coll.\,frontale}$ représente l'énergie au delà de laquelle tous les protons sont ralentis. On ne devrait donc pas détecter de gerbes d'énergie supérieure à $7.10^{19}\,eV$.

Or on en détecte !

ex 4 **Effet Compton**

1_



$$(P + k - k')^2 = P'^2 = m^2$$

$$= \underset{m^2}{P^2} + \underset{0}{k^2} + \underset{0}{k'^2} + 2P.k - 2(P+k).k'$$

donc $P.k = (P+k).k'$

qui s'écrit $E.|\vec{k}| - \vec{p}.\vec{k} = E.|\vec{k}'| + |\vec{k}|\,|\vec{k}'| - (\vec{p}+\vec{k}).\vec{k}'$

$$(E - |\vec{p}|\cos\theta)\,|\vec{k}| = (E + |\vec{k}|)\,|\vec{k}'| - (\vec{p}+\vec{k}).\vec{k}'$$

$$|\vec{k}'| = \frac{E - p\cos\theta}{E + |\vec{k}| - \hat{k}'.(\vec{p}+\vec{k})}\,|\vec{k}|$$

2- L'électron est supposé au repos : $\vec{p} = \vec{0}$ et $E = m$

$$|\vec{k}'| = \frac{E}{E + |\vec{k}| - \hat{k}'.\vec{k}}\,|\vec{k}| = \frac{m}{m + k - \hat{k}'.\vec{k}}\,k = \frac{k}{1 + \frac{k}{m}(1-\cos\theta')}$$

$\lambda = \frac{h}{p}$ donc $\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{k}{m}(1-\cos\theta')\right) = \lambda\left[1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\theta')\right]$

$\lambda_c = \frac{h}{m}$

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c\,(1-\cos\theta')$$

3- cas général : $\vec{p} \neq \vec{0}$

$k'^0 = |\vec{k}'|$ est maximale lorsque, pour θ et $|\vec{k}|$ fixé, $1 + \frac{k}{m}(1-\cos\theta')$ est minimal, donc lorsque $\hat{k}'.(\vec{p}+\vec{k})$ est maximal, soit $\vec{k}'$ et $\vec{p}+\vec{k}$ colinéaires et de même sens. On a alors $k'_{max} = \frac{E - p\cos\theta}{E + k - |\vec{p}+\vec{k}|}\,k$

4- $\begin{cases}\text{électron ultrarelativiste}\\ \text{photon de basse énergie}\end{cases}$

On peut faire l'approximation $k \ll p, E$, donc $k'_{max} = \frac{E - p\cos\theta}{E - p}\,k$

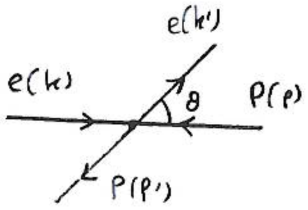
Comme on cherche à obtenir k' le plus grand possible, on peut supposer que θ n'est pas petit, donc on peut remplacer p par E au numérateur.

De plus : $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \sim |\vec{p}| + \frac{m^2}{2|\vec{p}|}$ donc $E - p \sim \frac{m^2}{2E}$

Ainsi $k'_{max} \sim \frac{E(1-\cos\theta)}{m^2/2E}\,k \sim \left(\frac{2E\sin\theta/2}{m}\right)^2 k$

L'énergie du photon diffusé augmente dans ce régime comme le carré de l'énergie de l'électron incident. L'approximation est valable tant que $E - p \gg k$, soit $\frac{m^2}{2E} \gg k$. Pour $E = 4\,GeV$, la condition est $k \ll 130\,eV$ ...

ex5 Diffusion d'électrons



1) $q^2 = k^2 + k'^2 - 2k.k' = -2kk' = -2kk'(1-\cos\theta) < 0$

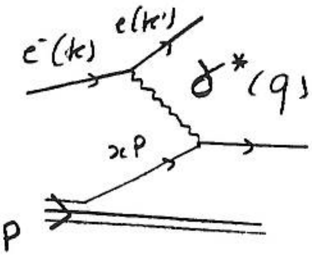
$P.q = Pk - P.k' = Ek + kp - Ek' - pk'\cos\theta$

2) $(k-k'+P)^2 = P'^2 = M'^2 = q^2 + 2qP + \underbrace{P^2}_{"M^2}$

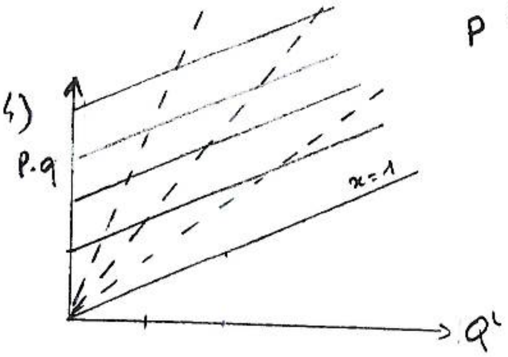
donc $q^2 + 2P.q = M'^2 - M^2 > 0$ donc $P.q > 0$

3) $(k-k'+xP)^2 = x^2M^2 = q^2 + 2q.Px + x^2M^2$ donc $x = \frac{-q^2}{2P.q} = \frac{Q^2}{2P.q}$ ①

modèle des partons :



4)



Collisions quasiélastiques (M' fixé) : —

$q^2 = -Q^2 = M'^2 - M^2 - 2P.q$

$2P.q = +Q^2 + \underbrace{M'^2 - M^2}_{>0}$

cas limite : $M'^2 = M^2$ alors $x = 1$

Collisions profondément inélastiques (x fixé) ...

$P.q = \frac{Q^2}{2x}$

5) Cible fixe $\left| \begin{array}{l} E = M \\ p = 0 \end{array} \right.$

$-Q^2 = -2kk'(1-\cos\theta) \Rightarrow k' = \frac{+Q^2}{2k(1-\cos\theta)}$

$P.q = M(k-k')$

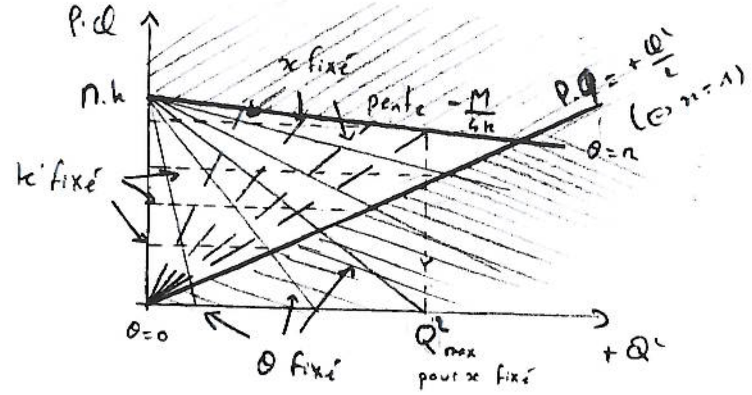
donc $P.q = Mk - \frac{M}{2k(1-\cos\theta)} Q^2$ ②

<u>k' fixé :</u> $P.q$ fixé

$+Q^2 = 2kk'(1-\cos\theta)$ varie entre 0 et $4kk'$

<u>θ fixé :</u> droite $P.q = mk - \dfrac{M}{2k(1-\cos\theta)}\,Q^2$

$-\dfrac{M}{2k(1-\cos\theta)}$ varie entre $-\infty$ et $-\dfrac{M}{4k}$



$2P.q = Q^2 + M'^2 - M^2$

donc $PQ \geq +\dfrac{Q^2}{2}$

(l'égalité correspond à $x=1$)

/// : région cinématiquement interdite

$Q^2 = 2k^2(1-\cos\theta) - \dfrac{Q^2}{x}\dfrac{k}{M}(1-\cos\theta)$ (en utilisant ① et ②)

donc $Q^2 = \dfrac{2k^2(1-\cos\theta)}{1+\dfrac{k}{Mx}(1-\cos\theta)} = \dfrac{2k^2C}{1+\dfrac{k}{Mx}C}$ où $C = 1-\cos\theta$

$\dfrac{dQ^2}{dC} = \dfrac{2k^2}{\left(1+\dfrac{k}{Mx}C\right)^2} > 0$ donc Q^2 est maximal pour C maximal, soit $\theta=\pi$

$Q^2_{max} = \dfrac{4k^2}{1+\dfrac{2k}{Mx}} \sim 2Mxk$ ($k \gg M$)

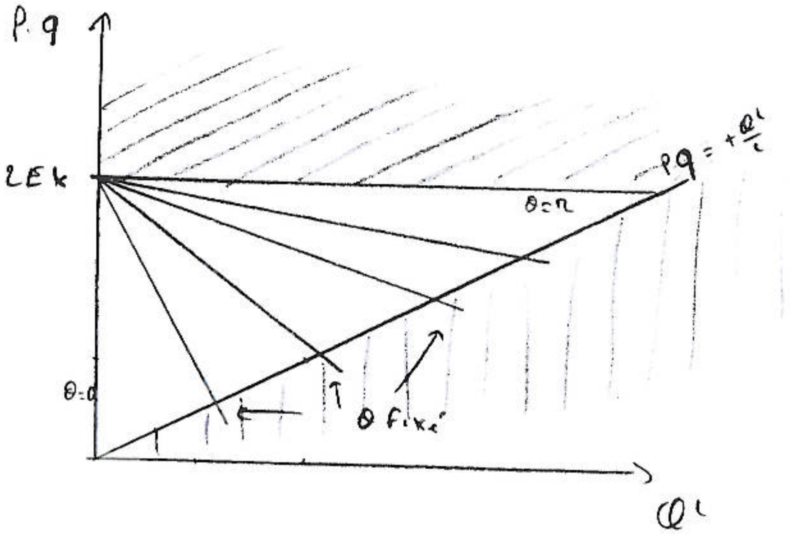
6) Collisionneur ultrarelativiste

$p \simeq E$ donc $P.q = 2Ek - (E + E\cos\theta)k'$

$k' = \dfrac{+Q^2}{2k(1-\cos\theta)}$

d'où $P.q = 2Ek - \dfrac{E(1+\cos\theta)}{2k(1-\cos\theta)}\,Q^2$ ③

$\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+u}{1-u}$ varie entre 0 et $+\infty$ pour $u \in [-1,1]$



③ + ① $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2x} + \frac{E}{2k}\,\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) Q^2 = 2Ek$

$Q^2 = \dfrac{2Ek}{\frac{1}{2x} + \frac{E}{2k}\,\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ maximal quand $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ est minimal, donc pour $\theta = \pi$

d'où $Q^2_{max} = 4Ekx$

A HERA, $Q^2_{max} = 2 \cdot 800 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \simeq 9,6\ GeV^2$

A x donné, la valeur maximale de Q^2 est beaucoup plus élevée

$\rightarrow$ la résolution $\frac{1}{\sqrt{Q^2}}$ est plus fine