Précession de Thomas : Correction

1 Précession de Larmor

1) Un électron ayant une trajectoire circulaire a un moment orbital $L = mrv$. Le moment magnétique correspondant est $\mu = s\,i$ où i est l'intensité du courant dû à cette charge en mouvement, qui vaut $i = e/t$. Le temps mis pour faire un tour est $t = 2\pi r/v$. La surface du disque étant πr^2, on en déduit que $\mu = \pi r^2 ev/(2\pi r)$, soit

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{L}\,. \tag{1}$$

2) La force qui s'exerce sur le moment magnétique est nulle si le champ est uniforme. Le couple vaut $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$, qui tend donc à aligner $\vec{\mu}$ suivant la direction de $\vec{B}$, et dans le même sens.

3) En combinant l'équation

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \tag{2}$$

avec les relations $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ et (1), on obtient immédiatement l'équation

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m}\vec{L} \wedge \vec{B}\,, \tag{3}$$

à comparer avec l'équation

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}\,, \tag{4}$$

dans le cas d'une particule chargée soumise uniquement à l'action d'un champ magnétique constant. Ici, la particule est a priori soumise à l'interaction électrostatique du noyau, qui lui confère donc un moment orbital, responsable d'un moment magnétique sur lequel agit le champ magnétique. On constate, en comparant les équations (3) et (4) que la vitesse d'une particule soumise à l'action d'un champ magnétique précesse autour du champ à la pulsation e/m, alors que dans le cas présent, la précession de $\vec{L}$ se fait à la pulsation $e/(2m)$, appelée pulsation de Larmor.

Dans le cas quantique, en se plaçant par exemple en représentation d'Heisenberg, on a l'équation d'évolution

$$\dot{\vec{L}} = \frac{1}{i\hbar}[\vec{L}, H] \tag{5}$$

qui donne donc, avec $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$,

$$\dot{L}_k = -\frac{e}{i\hbar 2m}[L_k, L_j\,B_j] = \frac{e}{2m}\epsilon_{ijk}L_i\,B_j \tag{6}$$

soit encore

$$\dot{\vec{L}} = \frac{e}{2m}(\vec{L} \wedge \vec{B}) \tag{7}$$

qui est l'analogue quantique de l'équation (3). L'équation d'évolution pour les valeurs moyennes de $\vec{L}$ sera donc donnée par la même équation que dans le cas classique.

2 Résonance magnétique électronique et nucléaire

1) *Rappel (voir cours) :*

Il existe un homomorphisme (ou morphisme) du groupe SU(2) sur le groupe des rotations SO(3) défini par

$$\boxed{\begin{array}{c} \pm U \to R(U) \ \text{ tel que} \\ \forall \vec{x} \in \mathrm{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \vec{x}\,' = R(U)\,\vec{x} \\ \text{avec } \ \vec{x}\,' \cdot \vec{\sigma} = U\,\vec{x}\cdot\vec{\sigma}\,U^{-1} \end{array}} \tag{8}$$

On en déduit la propriété importante :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall\ V \in SU(2), \text{ les classes d'éléments conjugués s'écrivent} \\ VU(\theta,\vec{n})V^{-1} = U(\theta,\vec{n}') \\ \text{où } \vec{n}' \text{ se déduit de } \vec{n} \text{ par la rotation } R(V) : \vec{n}' = R(V)\vec{n}\,. \end{array}} \tag{9}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} VU(\theta,\vec{n})V^{-1} &= V\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{\theta}{2}\right)V^{-1} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}' \end{aligned}$$

où $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}' = V\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,V^{-1}$.

Les classes d'éléments conjugués sont donc caractérisées par le même angle.

Il suffit ici d'écrire que $U = \exp(-i\theta\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2})$ avec $\theta = -\omega t$ et $\vec{n} = \vec{k}$, ce qui donne

$$U(R) = \begin{pmatrix} e^{i\omega\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega\frac{t}{2}} \end{pmatrix} .$$

2) $|\chi >= U(t)\,|\psi >$.

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\chi >= i\hbar\frac{d}{dt}(U(t)\,|\psi >) = i\hbar\,\dot{U}(t)U^{-1}(t)|\chi > + U(t)\left(-\frac{\gamma\hbar}{2}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,U^{-1}(t)|\chi >$$

$$= i\hbar\,\dot{U}(t)U^{-1}(t)|\chi > -\frac{\gamma\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}'|\chi > \ . \tag{10}$$

Or

$$\dot{U}(t) = i\frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} e^{i\omega\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & -e^{-i\omega\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

donc

$$\dot{U}(t)\, U^{-1}(t) = i\frac{\omega}{2}\sigma_3$$

et

$$i\frac{d}{dt}\,|\chi >= \left(-\frac{\omega}{2}\sigma_3 - \frac{\gamma}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}'\right)\,|\chi > \ .$$

3) Par intégration immédiate on obtient

$$|\chi(t) >= \exp\left[\left(i\frac{\omega}{2}\sigma_3 + i\frac{\gamma}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}'\right)t\right]\,|\chi(0) >,$$

soit encore

$$|\psi(t) >= U^{-1}(t)\exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}t\right)|\psi(0) >,$$

où

$$\vec{n} = \left|\begin{array}{l} -\gamma B_1 \\ 0 \\ -\gamma B_0 - \omega \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_0 - \omega \end{array}\right. \ .$$

4) On part de l'état $\psi(0) = |\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} >$. La probabilité de non renversement est donc donnée par

$$p(t) = \left| < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|\,U^{-1}(t)\,\exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}t\right)\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} > \right|^2 .$$

Or

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

donc

$$< \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|\,U^{-1}(t) = (1\ 0)\begin{pmatrix} e^{-i\omega\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega\frac{t}{2}} \end{pmatrix} = (e^{-i\omega\frac{t}{2}}\ 0) = e^{-i\omega\frac{t}{2}} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|\,.$$

Ainsi

$$p(t) = \left| < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|\,\exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}t\right)\,|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} > \right|^2 = \left|\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(V)\right|^2$$

avec $V = \exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}t\right)$.

5) La probablilité de renversement s'obtient par la relation $q(t) = 1 - p(t)$. Or

$$\exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}t\right) = \exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2|\vec{n}|}|\vec{n}|\,t\right) = \cos\frac{|\vec{n}|t}{2} - i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\sin\frac{|\vec{n}|t}{2}\,.$$

On doit évaluer le coefficient

$$(1\ 0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\,.$$

Ici,

$$a \;=\; \cos\frac{|\vec{n}|t}{2} - i\frac{n_z}{|\vec{n}|}\sin\frac{|\vec{n}|t}{2}$$

d'où

$$p(t) = |a|^2 = \cos^2\frac{|\vec{n}|t}{2} + \frac{n_z^2}{|\vec{n}|^2}\sin^2\frac{|\vec{n}|t}{2}\,.$$

Comme $n_z = -\omega - \gamma\, B_0 \;= \omega_0 - \omega\,,\; |\vec{n}| = \sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}$. Ainsi

$$p(t) = \cos^2\frac{t\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}}{2} + \frac{(\omega_0-\omega)^2}{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}\sin^2\frac{t\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}}{2}\,, \qquad (11)$$

d'où

$$q(t) = 1 - p(t) = \frac{\omega_1^2}{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}\sin^2\frac{t\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}}{2}\,.$$

6) Lorsque $\omega \;=\; \omega_0\,$, le maximum de $q(t)$ est 1. Ainsi un faible champ tournant peut faire basculer le spin. Il suffit d'ajuster la fréquence de rotation du champ à la fréquence cyclotron du champ $\vec{B}_0\,$.

7) a) $H = -\gamma\hbar\vec{J}\cdot\vec{B}\,$.

b) $D(U)\,\vec{J}\cdot\vec{B}(t)\,D^{-1}(U) = \vec{J}\cdot\vec{B}'\,$.

c) $|\psi(t)>= D^{-1}(U)\exp(-it\,\vec{J}\cdot\vec{n})|\psi(0)>\;$.

d) $p(t) = \left|< j\,m|D^{-1}(U)\exp(-it\,\vec{J}\cdot\vec{n})|j\,m>\right|^2\,$.
Or $D(U)$ est diagonale avec des valeurs propres de module 1 : ceci se vérifie sur la forme explicite de $D(U)$ en utilisant le fait que U est elle-même diagonale (voir le TD sur la construction de Weyl des représentations irréductibles de $SU(2)$). Plus simplement, cela s'établit en utilisant le fait que U et $D(U)$ s'obtiennent par exponentiation de matrices diagonales réelles (respectivement proportionnelles à σ_3 et J_3).
On en déduit donc

$$p(t) = \left|< j\,m|\exp(-it\,\vec{J}\cdot\vec{n})|j\,m>\right|^2 = \left|\mathcal{D}^j_{mm}(V)\right|^2$$

avec

$$V = \exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}t\right) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\,.$$

Pour un spin j complètement polarisé suivant z, la probabilité de non renversement est donc donnée par

$$p(t) = \left|\mathcal{D}^j_{jj}(V)\right|^2\,,$$

avec

$$\mathcal{D}^j_{m'm}(V) = \sum_{\substack{p+q=j-m' \\ 0\le p\le j+m \\ 0\le q\le j-m}} \sqrt{(j+m')!\,(j-m')!\,(j+m)!\,(j-m)!}$$
$$\times \frac{\alpha^{j+m-p}\gamma^p\beta^{j-m-q}\delta^q}{(j+m-p)!p!(j-m-q)!q!}\,.$$

Dans le cas d'un spin complètement polarisé suivant z, la probabilité de non renversement $p(t) = |\mathcal{D}^j_{jj}(V)|^2$ correspond dans la somme précédente à $p+q=0$, soit $p=q=0$. Il reste donc uniquement un terme, égal à

$$\mathcal{D}^j_{jj}(V) = \frac{\sqrt{(2j)!(2j)!}}{(2j)!}\alpha^{2j} = \alpha^{2j}\,.$$

On en déduit que $p(t) = |\alpha|^{4j}$, avec $\alpha = \cos\frac{|\vec{n}|t}{2} - i\frac{n_z}{|\vec{n}|}\sin\frac{|\vec{n}|t}{2}$. Ainsi

$$p(t) = \left[\cos^2\frac{t\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}}{2} + \frac{(\omega_0-\omega)^2}{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}\sin^2\frac{t\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}}{2}\right]^{2j}\,. \tag{12}$$

On obtient en particulier le résultat (11) dans le cas d'un spin $\frac{1}{2}$.

3 Précession de Thomas

1) Il suffit d'écrire les formules de changement de référentiel pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, ce qui donne pour le champ magnétique, à l'ordre 1 (on suppose ici que les vitesses sont faibles devant celle de la lumière)

$$\vec{B'} = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\wedge\vec{E}\,, \tag{13}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. L'énergie d'interaction correspondante est alors

$$U' = -\vec{\mu}\cdot\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\wedge\vec{E}\right) \tag{14}$$

puisque son gradient angulaire est égal au couple $\vec{\mu}\wedge\vec{B'}$.

2) Le résultat est immédiat en utilisant le couplage (14) et en réorganisant le produit mixte qui apparaît.

3) En appliquant la relation rappelée dans l'énoncé au spin $\vec{s}$, on obtient pour l'équation du mouvement satisfaite par $\vec{s}$, dans le référentiel non tournant dans lequel l'électron est au repos, un terme supplémentaire $-\vec{s}\wedge\vec{\omega}$ qui correspond donc à un

terme d'interaction en $\vec{s}\cdot\vec{\omega}$.

4) Il suffit d'écrire que $x' = \Lambda_{boost}(\vec{\beta})\, x$ et $x'' = \Lambda_{boost}(\vec{\beta}+\delta\vec{\beta})\, x$ pour obtenir immédiatement le résultat demandé, en utilisant $\Lambda^{-1}_{boost}(\vec{\beta}) = \Lambda_{boost}(-\vec{\beta})$.

5) Deux possibilités : calcul pédestre ou calcul compact !

Calcul pédestre :
Rappel : générateurs du groupe de Lorentz
• Les générateurs des rotations sont de la forme

$$J^i = \begin{pmatrix} 0 & \\ & J^i_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

où les matrices 3×3 $J^i_{3\times 3}$ sont les générateurs des rotations à 3 dimensions, qui s'écrivent $(J^i_{3\times 3})_{kj} = i\epsilon_{ijk}$. On a $J^+ = J$. Explicitement,

$$J^1_{3\times 3} = i\begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \quad J^2_{3\times 3} = i\begin{pmatrix} & & -1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad J^3_{3\times 3} = i\begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}. \tag{15}$$

• Les générateurs des boosts sont de la forme (en ne représentant que les éléments non nuls)

$$K^1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad K^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad K^3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \tag{16}$$

On a $K^+ \neq K$.
Une rotation *active* d'angle θ et d'axe $\vec{n}$ s'écrit

$$R = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\,,$$

et l'on montre, en calculant explicitement le développement en série à l'aide de la définition des générateurs, que

$$e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}\vec{x} = \vec{x}\,' = (\vec{x} - \vec{n}\cdot\vec{x})\cos\theta + \vec{n}\wedge\vec{x}\sin\theta + \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{x}) \tag{17}$$

Un boost *actif* de rapidité ϕ et d'axe $\vec{n}$ s'écrit

$$\Lambda = e^{i\phi\vec{n}\cdot\vec{K}}\,,$$

ce qui conduit à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'^0 &=& x^0\mathrm{ch}\,\phi + (\vec{\mathrm{n}}\cdot\vec{\mathrm{x}})\,\mathrm{sh}\,\phi \\ \vec{x}\,' &=& \vec{x} - \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{x}) + (x^0\mathrm{sh}\,\phi + (\vec{\mathrm{n}}\cdot\vec{\mathrm{x}})\,\mathrm{ch}\,\phi)\vec{\mathrm{n}} \end{array}\right. \tag{18}$$

En utilisant les notations usuelles

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \mathrm{ch}\,\phi \\ \gamma\beta = \mathrm{sh}\,\phi \end{array} \right. \tag{19}$$

et en posant

$$\frac{\vec{v}}{c} = \beta\,\vec{n} = \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} ,$$

on peut écrire (18) sous la forme

$$\Lambda_{boost\,actif}(\beta\vec{n}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_1^2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_1\beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_1\beta_2 & 1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_2^2 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_2\beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_1\beta_3 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_2\beta_3 & 1+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_3^2 \end{pmatrix}$$

Revenons au problème de la précession de Thomas qui nous préoccupe. On peut supposer, sans perte de généralité, que β est suivant l'axe x et que $\delta\beta$ est dans le plan x, y. Les boosts envisagés dans la question 4) sont *passifs*. On a donc, en utilisant les notations de cette question 4), avec $\beta = \beta_1$,

$$\Lambda_{boost}(-\vec{\beta}) = \Lambda_{boost\,actif}(\beta, 0, 0) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda_{boost}(\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}) = \Lambda_{boost\,actif}(-\beta_1 - \delta\beta_1, -\delta\beta_2, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'(\beta_1+\delta\beta_1) & -\gamma'\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma'(\beta_1+\delta\beta_1) & 1+\frac{\gamma'-1}{\beta'^2}(\beta_1+\delta\beta_1)^2 & \frac{\gamma'-1}{\beta'^2}(\beta_1+\delta\beta_1)\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma'\delta\beta_2 & \frac{\gamma'-1}{\beta'^2}(\beta_1+\delta\beta_1)\delta\beta_2 & 1+\frac{\gamma'-1}{\beta'^2}\delta\beta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\beta'^2 = (\beta_1 + \delta\beta_1)^2 + \delta\beta_2^2 \sim \beta_1^2 + 2\beta_1\delta\beta_1$ et $\gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'^2} \sim \gamma + \gamma^3\beta\delta\beta_1$. Ceci donne au premier ordre en $\delta\beta$

$$\Lambda_{boost\, actif}(-\beta_1-\delta\beta_1,-\delta\beta_2,0)=\begin{pmatrix}\gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 & -\gamma\beta-\gamma^3\delta\beta_1 & -\gamma\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma\beta-\gamma^3\delta\beta_1 & \gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma\delta\beta_2 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On obtient donc finalement

$$\Lambda_T=\Lambda_{boost}(\vec\beta+\delta\vec\beta)\,\Lambda_{boost}(-\vec\beta)=\begin{pmatrix}1 & -\gamma^2\delta\beta_1 & -\gamma\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma^2\delta\beta_1 & 1 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma\delta\beta_2 & -\frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ce résultat peut donc s'écrire sous la forme (on utilise des notations passives en accord avec l'énoncé)

$$\Lambda_T=(1+i\Delta\vec\Omega\cdot\vec J)(1-i\Delta\vec\beta\cdot\vec K) \tag{20}$$

avec

$$\Delta\vec\beta=\gamma^2\,\delta\vec\beta_{\|}+\gamma\delta\vec\beta_{\perp} \tag{21}$$

et

$$\Delta\vec\Omega=\left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\right)\,\vec\beta\wedge\delta\vec\beta\,, \tag{22}$$

puisque $(\gamma-1)/\beta=\gamma^2/(\gamma+1)$. Dans le membre de droite de (20), le premier facteur correspond à une rotation passive de vitesse $\Delta\vec\Omega$ et le second à un boost passif de vitesse $\Delta\vec\beta$.

6) D'après les questions précédentes (en explicitant le caractère actif/passif des transformations), on a

$$x'''=R_{passive}(-\Delta\vec\Omega)\,\Lambda_{boost\, passif}(\vec\beta+\delta\vec\beta)\,x\,. \tag{23}$$

Le passage du repère K'', référentiel du laboratoire de l'électron (mais pas d'inertie) à l'instant $t+\delta t$ au référentiel K''', qui est le référentiel sans rotation, et donc d'inertie, à l'instant $t+\delta t$, se fait par la relation

$$x'''=R(-\Delta\vec\Omega)\,x'' \tag{24}$$

La vitesse de rotation de Thomas est donc simplement $\vec\omega_T=\vec\omega_{K'''/K''}=-\Delta\vec\Omega/\delta t$, i.e

$$\vec\omega_T\ =\ \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec a\wedge\vec v}{c^2}\,. \tag{25}$$

Rappelons que $x'' = R_{passive}(\omega_{K''/K'''})\, x''' = R_{active}(-\omega_{K''/K'''})\, x'''$ ou encore que $x''' = R_{passive}(\omega_{K'''/K''})\, x'' = R_{active}(-\omega_{K'''/K''})\, x''$.

7) En utilisant l'expression de $\vec{a}$ en fonction de $\vec{E}$ (et donc de dV/dr)

$$\vec{a} \simeq \frac{e\vec{E}}{m} = -\frac{1}{m}\frac{\vec{r}}{r}\frac{dV}{dr}$$

et en l'injectant dans l'expression de $\vec{\omega}_T$ obtenue à la question précédente, on en déduit l'expression

$$\vec{\omega}_T \;=\; -\frac{1}{2m^2c^2}\frac{\vec{r}\wedge\vec{v}}{r}\frac{dV}{dr} \;=\; -\frac{1}{2m^2c^2}\vec{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$$

dans la limite où $\gamma \to 1$.

Dans le référentiel d'inertie K''', le taux de variation de $\vec{s}$ est donné par U', et en utilisant la relation de la question 3), on en déduit le résultat demandé pour U , puisque

$$\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{K''} = \left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right)_{K'''} + \vec{\omega}_{K'''/K''} \wedge \vec{s}\,. \tag{26}$$

8) Dans le cas de la physique nucéaire, on peut négliger les effets du potentiel coulombien. On a alors

$$U_N \simeq \vec{s}\cdot\vec{\omega}_T \tag{27}$$

et donc

$$U_N = -\frac{1}{2M^2c^2}\vec{s}\cdot\vec{L}\frac{1}{r}\frac{dV_N}{dr}\,. \tag{28}$$

En physique nucléaire comme en physique atomique, les potentiels moyens V et V_N sont attractifs. La différence provient du signe des préfacteurs respectifs $g-1$ et de -1, qui sont opposés, et vont donc donner lieu à une inversion des levées de dégénérescence des niveaux.