1) $x \mapsto x'$

$f \mapsto f'$ avec $f'(x') = f(x)$

a) C'est une fonction scalaire au sens où le changement de coordonnée n'est pas codé par un changement des composantes de f.

b) $x' = x + \varepsilon(x)$

$$\delta f(x) = f'(x) - f(x) = f(x - \varepsilon(x)) - f(x) = -\varepsilon(x) \frac{df}{dx}(x)$$

donc $$\delta = -\varepsilon(x) \frac{d}{dx}$$

c) $x' = x + \delta a$ (δa fixe) : translation de coordonnée infinitésimale

$\delta = -\delta a \frac{d}{dx}$ $\quad \varepsilon(x) = \delta a$ arbitraire donc on se ramène à $\| \delta = -\frac{d}{dx} = -\nabla = -A$

d) $x' = x(1 + \delta b)$ (δb fixe) : dilatation infinitésimale

$x' = \lambda x$ avec $\lambda = 1 + \delta b$ $\quad \varepsilon(x) = x \delta b$ $\quad \delta = -\delta b \, x \frac{d}{dx}$

i.e $\| \delta = -x \frac{d}{dx} = -B$

e) $x' = x + x^2 \delta c$ (δc fixe) :

$\varepsilon(x) = x^2 \delta c$ $\quad \delta = -x^2 \frac{d}{dx} = -C$

2) a) $$[A, B] = \left[\frac{d}{dx}, x\frac{d}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\right] - x\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\right] = \frac{d}{dx} = A$$

$$[A, C] = \left[\frac{d}{dx}, x^2\frac{d}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[x^2\frac{d}{dx}\right] - x^2\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\right] = 2x\frac{d}{dx} = 2B$$

$$[B, C] = \left[x\frac{d}{dx}, x^2\frac{d}{dx}\right] = x\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{d}{dx}\right] - x^2\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\right]$$

$$= 2x^2\frac{d}{dx} + x^3\frac{d^2}{dx^2} - x^2\frac{d}{dx} - x^3\frac{d^2}{dx^2} = x^2\frac{d}{dx} = C$$

i.e. $$\begin{cases} [A, B] = A \\ [A, C] = 2B \\ [B, C] = C \end{cases}$$

b) Ces relations de commutation ressemblent à celle de $SU(2)$:

$$[J_3, J_+] = J_+ \qquad J_+ = J_1 + iJ_2 \qquad J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$$

$$[J_3, J_-] = -J_- \qquad J_- = J_1 - iJ_2 \qquad J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_3$$

Par analogie, posons $\begin{cases} a = A + C \\ b = A - C \\ c = B \end{cases}$ on reste donc dans la même $\mathbb{R}$-algèbre de Lie

$[a,b] = -2[A,C] = -4B$ donc $[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] = -B = -c$ $\qquad [i\sigma_1, i\sigma_2] = -i\sigma_3$

$[a,c] = A - C = b$ $\qquad [\frac{a}{2}, c] = \frac{b}{2}$ $\qquad \underline{SU(2)}$: $[i\sigma_1, i\sigma_3] = +i\sigma_2$

$[b,c] = A + C = a$ $\qquad [\frac{b}{2}, c] = \oplus\frac{a}{2}$ $\qquad [i\sigma_2, i\sigma_3] = \ominus i\sigma_1$

signes différents

Les $\mathbb{R}$-algèbres sont donc <u>distinctes</u> : pour changer ce signe relatif, le seul moyen est d'introduire un facteur i devant $\frac{b}{2}$ et c, mais on change alors la $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

c) B est le générateur des dilatations.

d)

e) A, B, C forment une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

f) $g_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}{}^{\gamma} C_{\beta\gamma}{}^{\delta}$: forme de Killing (tenseur symétrique)

$X_1 = A \qquad C_{12}{}^{k} = \delta_1^{k}$

$X_2 = B \qquad C_{13}{}^{k} = 2\delta_2^{k}$

$X_3 = C \qquad C_{23}{}^{k} = \delta_3^{k}$

$$g_{11} = C_{1\delta}{}^{\gamma} C_{1\gamma}{}^{\delta} = C_{12}{}^{1} C_{11}{}^{2} + C_{13}{}^{2} C_{12}{}^{3} = 0$$

$$g_{12} = C_{1\delta}{}^{\gamma} C_{2\gamma}{}^{\delta} = C_{12}{}^{1} C_{21}{}^{2} + C_{13}{}^{2} C_{22}{}^{3} = 0$$

$$g_{13} = C_{1\delta}{}^{\gamma} C_{3\gamma}{}^{\delta} = C_{12}{}^{1} C_{31}{}^{2} + C_{13}{}^{2} C_{32}{}^{3} = -4$$

$$g_{22} = C_{2\delta}{}^{\gamma} C_{2\gamma}{}^{\delta} = C_{21}{}^{1} C_{21}{}^{1} + C_{23}{}^{3} C_{23}{}^{3} = (-1)(-1) + 1 \cdot 1 = 2$$

$$g_{23} = C_{2\delta}{}^{\gamma} C_{3\gamma}{}^{\delta} = C_{21}{}^{1} C_{31}{}^{1} + C_{23}{}^{3} C_{33}{}^{3} = 0$$

$$g_{33} = C_{3\delta}{}^{\gamma} C_{3\gamma}{}^{\delta} = C_{31}{}^{2} C_{32}{}^{1} + C_{32}{}^{3} C_{33}{}^{2} = 0$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det g = -32 \neq 0$$

donc l'algèbre est semi-simple

g) Valeurs propres: $(4, -4, 2)$, ce qui conduit à une forme non définie négative.

Elle n'est donc pas compacte.

h) <u>Opérateur de Casimir:</u>

$$C_2 = g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta = -\frac{1}{4} X_1 X_3 + \frac{1}{2} X_2 X_2 - \frac{1}{4} X_3 X_1$$

$$= -\frac{1}{4} AC + \frac{1}{2} B^2 - \frac{1}{4} CA$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = \frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d}{dx}\right) = 2x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2} \\ CA = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = x^2 \frac{d^2}{dx^2} \end{array}\right\} \Rightarrow AC + CA = 2\left(x\frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}\right)$$

$$B^2 = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) = x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx}$$

$$C_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}\right) = 0$$

i) C_2 est multiple de l'identité dans une représentation irréductible de l'algèbre (lemme de Schur).

<u>Généralisation</u>

$$B' = x\frac{d}{dx} - j = B - j$$

$$C' = x^2\frac{d}{dx} - 2jx = C - 2jx$$

$$A' = A = \frac{d}{dx}$$

$$[A, B'] = \left[\frac{d}{dx}, B - j\right] = [A, B]$$

$$[A, C'] = \left[\frac{d}{dx}, C - 2jx\right] = [A, C] - 2j\left[\frac{d}{dx}, x\right] = 2(B - j) = 2B'$$

$$[B', C'] = [B, C] - 2j[B, x] = C - 2jx = C'$$

L'algèbre de Lie est donc inchangée : on a une nouvelle représentation.

L'opérateur de Casimir s'écrit maintenant :

$$C_2 = -\frac{1}{4}\left[A'C' + C'A'\right] + \frac{1}{2}B'^2$$

$$\left.\begin{aligned} A'C' &= AC - 2j\frac{d}{dx}x = AC - 2j - 2jx\frac{d}{dx} \\ C'A' &= CA - 2jx\frac{d}{dx} \end{aligned}\right\} A'C' + C'A' = 2B^2 - 2j - 4jx\frac{d}{dx}$$

$$B'^2 = (B - j)^2 = B^2 - 2jx\frac{d}{dx} + j^2$$

d'où $C_2 = -\frac{1}{2}B^2 + \frac{j}{2} + jx\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}B^2 - jx\frac{d}{dx} + \frac{j^2}{2} = \frac{1}{2}j(j+1)$