Décomposition d'une amplitude

rem. $T = iS$ $\qquad T^+ = (iS)^+ = -iS^+ = -iS$ (S hermitien)

$\qquad\qquad\qquad\qquad = -T$ (T antisymétrique)

1) Les coefficients de Clebsch-Gordan décrivent un changement de base orthogonale, d'où :

orthogonalité :

$$\sum_{\alpha\beta} \langle \rho\alpha;\sigma\beta | \tau\gamma \rangle \langle \rho\alpha;\sigma\beta | \tau'\gamma' \rangle = \sum \langle \tau\gamma | \rho\alpha;\sigma\beta \rangle \langle \tau'\gamma' | \rho\alpha;\sigma\beta \rangle = \delta_{\tau\tau'}\delta_{\gamma\gamma'}$$

(les coefficients de Clebsch-Gordan sont réels)

$$\text{i.e. } \sum_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(\tau'\gamma')})_{\alpha\beta} = \delta_{\tau\tau'}\delta_{\gamma\gamma'}$$

complétude :

$$\sum_{\tau\gamma} \langle \rho\alpha;\sigma\beta | \tau\gamma \rangle \langle \rho\alpha';\sigma\beta' | \tau\gamma \rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}$$

$$\text{i.e. } \sum_{\tau,\gamma} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha'\beta'} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}$$

2) $$\sum_{a=1}^{d} T^{(\rho)a}_{\alpha\alpha'} T^{(\sigma)a}_{\beta\beta'} = \sum_a \langle \rho,\alpha | T^a | \rho,\alpha' \rangle \langle \sigma,\beta | T^a | \sigma,\beta' \rangle$$

or $$\sum_{\tau\gamma} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha''\beta''} T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha''} T^{(\sigma)a}_{\beta'\beta''}$$

$$= \sum_{\tau\gamma} \langle \tau\gamma | \rho\alpha;\sigma\beta \rangle \langle \tau\gamma | \rho\alpha'';\sigma\beta'' \rangle \langle \rho,\alpha' | T^a | \rho,\alpha'' \rangle \langle \sigma,\beta' | T^a | \sigma,\beta'' \rangle$$

Par antisymétrie de T^a, ceci s'écrit encore

$$\sum_{\tau\gamma} \langle \tau\gamma | \rho\alpha;\sigma\beta \rangle \langle \tau\gamma | \rho\alpha'';\sigma\beta'' \rangle \langle \rho,\alpha'' | T^a | \rho,\alpha' \rangle \langle \sigma,\beta'' | T^a | \sigma,\beta' \rangle$$

$$= \delta_{\alpha\alpha''}\delta_{\beta\beta''} \langle \rho,\alpha'' | T^a | \rho,\alpha' \rangle \langle \sigma,\beta'' | T^a | \sigma,\beta' \rangle$$

(en utilisant le complexe conjugué de la relation de complétude)

$$\sum_a = \langle \rho,\alpha | T^a | \rho,\alpha' \rangle \langle \sigma,\beta | T^a | \sigma,\beta' \rangle = \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha\alpha'} T^{(\sigma)a}_{\beta\beta'} \equiv X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} \quad \text{c.q.f.d.}$$

ainsi :

$$X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = \sum_{\tau\gamma} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha''\beta''} \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha''} T^{(\sigma)a}_{\beta'\beta''}$$

$$= -\sum_{\tau\gamma} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha\beta} \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha''} \mathcal{M}^{(\tau\gamma)}_{\alpha''\beta''} T^{(\sigma)a}_{\beta''\beta'} \quad \text{(antisymétrie de } T^a\text{)}$$

$$= -\sum_{\tau\gamma} (\mathcal{M}^{(\tau\gamma)})_{\alpha\beta} \sum_a \left(T^{(\rho)a} \mathcal{M}^{(\tau\gamma)} T^{(\sigma)a} \right)_{\alpha'\beta'}$$

3) $|e\alpha,\sigma\beta\rangle = \sum_{8,\gamma} \langle 8,\gamma|e\alpha;\sigma\beta\rangle\, |8,\gamma\rangle \doteq \sum_{8\gamma} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta}\, |8,\gamma\rangle$

Or $T^{(8)a} = T^{(e)a} \otimes 1 + 1 \otimes T^{(\sigma)a}$

donc $\langle 8,\gamma|T^a|e\alpha,\sigma\beta\rangle = \sum_{\gamma'} \langle 8\gamma|T^a|8\gamma'\rangle (\mathcal{M}^{(8\gamma')})_{\alpha\beta}$

$$= \sum_{\gamma'} T^{(8)a}_{\gamma\gamma'} (\mathcal{M}^{(8\gamma')})_{\alpha\beta}$$

$$= \langle 8,\gamma|e,\alpha';\sigma,\beta\rangle \langle e,\alpha'|T^a|e,\alpha\rangle + \langle 8,\gamma|e,\alpha;\sigma,\beta'\rangle\langle\sigma,\beta'|T^a|\sigma,\beta\rangle$$

$$= \sum_{\alpha'} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha'\beta} (T^{(e)a})_{\alpha'\alpha} + \sum_{\beta'} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta'} (T^{(\sigma)a})_{\beta'\beta} \qquad (6)$$

Soit encore, par antisymétrie sur T :

$$\sum_{\gamma'} T^{(8)a}_{\gamma\gamma'} (\mathcal{M}^{(8\gamma')})_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha'} T^{(e)a}_{\alpha\alpha'} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha'\beta} + \sum_{\beta'} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta'} (T^{(\sigma)a})_{\beta'\beta}$$

qui s'écrit matriciellement :

$$\Big\| \sum_{\gamma'} T^{(8)a}_{\gamma\gamma'} \mathcal{M}^{(8\gamma')} = -T^{(e)a}\mathcal{M}^{(8\gamma)} + \mathcal{M}^{(8\gamma)} T^{(\sigma)a} \qquad (7)$$

4) $X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = -\sum_{8\gamma} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta} \left(T^{(e)a}\mathcal{M}^{(8\gamma)}\, T^{(\sigma)a}\right)_{\alpha'\beta'}$

Partant de $T^{(e)a}\mathcal{M}^{(8\gamma)} = \mathcal{M}^{(8\gamma)} T^{(\sigma)a} - \sum_{\gamma'} T^{(8)a}_{\gamma\gamma'} \mathcal{M}^{(8\gamma')}$

on a donc $X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = -\sum_{8\gamma} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(8\gamma)} T^{(\sigma)a} T^{(\sigma)a})_{\alpha'\beta'}$

$$+ \sum_{8\gamma} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta} \sum_{\gamma'} T^{(8)a}_{\gamma\gamma'} (\mathcal{M}^{(8\gamma')} T^{(\sigma)a})_{\alpha'\beta'}$$

On utilise à nouveau l'identité (7) sous la forme

$$\mathcal{M}^{(8\gamma')} T^{(\sigma)a} = T^{(e)a}\mathcal{M}^{(8\gamma')} + \sum_{\gamma''} T^{(8)a}_{\gamma'\gamma''} \mathcal{M}^{(8\gamma'')}$$

ce qui donne

$$X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = C_\sigma (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha'\beta'} + \sum_{8\gamma} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta} \Big[T^{(e)a} \sum_{\gamma'} T^{(8)a}_{\gamma\gamma'} \mathcal{M}^{(8\gamma')}\Big]_{\alpha'\beta'}$$

$$- C_8 (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha\beta} (\mathcal{M}^{(8\gamma)})_{\alpha'\beta'}$$

$$X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = -\sum_{\varrho\gamma} \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha\beta} \left(T^{(\varepsilon)a}\, \underline{\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\, T^{(\sigma)a}}\right)_{\alpha'\beta'}$$

peut aussi s'écrire, en utilisant (7) sous la forme

$$\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\, T^{(\sigma)a} = T^{(\varepsilon)a}\, \mathcal{M}^{(\varrho\gamma)} + \sum_{\gamma'} T^{(\varrho)a}_{\gamma\gamma'}\, \mathcal{M}^{(\varrho\gamma')},$$

$$X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = -\sum_{\varrho\gamma} \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha\beta} \left[T^{(\varepsilon)a} \sum_{\gamma'} T^{(\varrho)a}_{\gamma\gamma'}\, \mathcal{M}^{(\varrho\gamma')}\right]_{\alpha'\beta'}$$

$$-\sum_{\varrho\gamma} \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha\beta} \left[T^{(\varepsilon)a}\, T^{(\varepsilon)a}\, \mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right]_{\alpha'\beta'}$$

$$= -\sum_{\varrho\gamma} \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha\beta} \left[T^{(\varepsilon)a} \sum_{\gamma'} T^{(\varrho)a}_{\gamma\gamma'}\, \mathcal{M}^{(\varrho\gamma')}\right]_{\alpha'\beta'} + C_\varepsilon \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha\beta} \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha'\beta'}$$

On a donc $X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = \frac{1}{2}\left[X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} + X_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}\right]$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\varrho\gamma} \left(C_\varepsilon + C_\sigma - C_\varrho\right) \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha\beta} \left(\mathcal{M}^{(\varrho\gamma)}\right)_{\alpha'\beta'} \quad \text{c.q.f.d.}$$

5) Considérons le cas particulier de $SU(2)$:

$C_\varepsilon = j_1(j_1+1)$ pour ε = rep. de spin j_1

$C_\sigma = j_2(j_2+1)$ pour σ = rep. de spin j_2

$C_\varrho = j(j+1)$ avec $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

- Le cas $j_1 = j_2 = 0$ donne $C_\varepsilon + C_\sigma - C_\varrho = 0$
- Supposons que $j_1 > 0$. Sans perte de généralité, on peut se restreindre au cas $j_1 \geq j_2$.

$C_{j_1+j_2} = (j_1+j_2+1)(j_1+j_2) = j_1^2 + 2j_1j_2 + j_2^2 + j_1 + j_2$

$C_{j_1} + C_{j_2} = j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) = j_1^2 + j_2^2 + j_1 + j_2$

donc $-C_{j_1+j_2} + C_{j_1} + C_{j_2} = -2j_1j_2 < 0$

Plus précisément, $\boxed{C_{j_1} + C_{j_2} - C_j \text{ décroît d'une valeur positive à une valeur négative quand } j \text{ croît}}$

<u>preuve</u> :

Considérons $X(p) = -C_j + C_{j_1} + C_{j_2}$ avec $p \in \{0, \ldots, 2j_2\}$, $j = j_1 - j_2 + p$, i.e. $X(p) = j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) - (j_1 - j_2 + p)(j_1 - j_2 + 1 + p)$

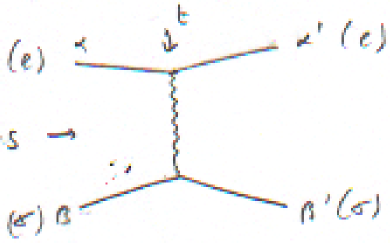
$= -p^2 + p\left[2(j_2 - j_1) - 1\right] + 2j_2(1 + j_1)$

p	0	$2j_2$
j	$j_1 - j_2$	$j_1 + j_2$
$\frac{dx}{dp}$	$-$	$-$
X	≥ 0 ↘	$-$

$X(0) = 2j_2(j_1+1) \geq 0$

$\frac{dx}{dp} = -2p + 2(j_2 - j_1) - 1$
$$\begin{cases} \left.\frac{dx}{dp}\right|_{j_1-j_2} = -4(j_1 - j_2) - 1 < 0 \\ \left.\frac{dx}{dp}\right|_{j_1+j_2} = -4j_1 - 1 < 0 \end{cases}$$

Considérons l'amplitude élastique de diffusion de deux particules appartenant aux représentations ρ et σ du groupe G. La contribution d'ordre le plus bas en perturbation correspond à l'échange d'un champ vectoriel de la représentation θ de G.



Le lagrangien correspondant s'écrit, pour la partie concernant le terme d'interaction

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(D_\mu^{(\rho)} \phi^{(\rho)}\right)\left(D^{(\rho)\mu} \phi^{(\rho)}\right) + \frac{1}{2}\left(D_\mu^{(\sigma)} \phi^{(\sigma)}\right)\left(D^{(\sigma)\mu} \phi^{(\sigma)}\right) - \frac{1}{2} m_\rho^2 \phi^{(\rho)2} - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \phi^{(\sigma)2}$$

$$+ \underbrace{\frac{M^2}{2} A_a^\mu A_{a\mu}}_{\text{brisure de l'invariance de jauge}} - \frac{1}{2}(\partial . A)^2$$

Modèle de Stueckelberg

avec la dérivée covariante
$$\begin{cases} D^{(\rho)\mu} = \partial^\mu - g A_a^\mu T^{(\rho)a} \\ D^{(\sigma)\mu} = \partial^\mu - g A_a^\mu T^{(\sigma)a} \end{cases}$$

Les règles de Feynman s'obtiennent aisément à l'aide du théorème de Wick sur les intégrales gaussiennes :

$$\langle 0|T \phi^{(\rho)}_{(x)} \phi^{(\rho)}_{(y)}|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{i}{k^2 - m_\rho^2 + i\varepsilon} \qquad x \xleftarrow{\;k\;} y$$

(idem pour σ)

$$\langle 0|T A_a^\mu(x) A_b^\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-i}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \delta_{ab} g^{\mu\nu} \qquad \underset{a}{x} \xleftarrow{\;k\;} \underset{b}{y}$$

terme de vertex : $(\rho)\ \underset{p'}{\alpha'} \longleftarrow \underset{a(\theta)}{} \longleftarrow \underset{p}{\alpha}\ (\rho)$ $\qquad \frac{1}{2} i\, \partial^\mu \phi^{(\rho)} (-g) A_a^\mu T^{(\rho)a} \phi^{(\rho)}$

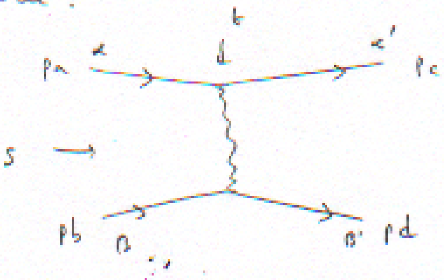
$$i \frac{-g}{2}\left[\partial^\mu \phi_{\alpha'}^{(\rho)}(x)\, A_{a\mu}(x) T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha} \phi_\alpha^{(\rho)}(x) + T_{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha'}(x) A_{a\mu}(x) \partial^\mu \phi_\alpha^{(\rho)}(x)\right]$$

La contribution du vertex correspondant s'obtient en sommant sur toutes les contractions possibles avec trois champs $\phi(x_1)\ \phi(y_1)\ A_\mu(z_1)$, ce qui donne en représentation d'impulsion $i(-g)\, 2 \cdot \frac{1}{2}\left[(+ip^\mu) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{antisymétrie de } T}}{-} (-ip'^\mu)\right] T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha} = -g(p^\mu + p'^\mu) T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha}$ (le facteur 2 vient du nombre de contractions possibles)

$(p^\mu = i\partial^\mu)$

La contribution d'ordre le plus bas en perturbation peut maintenant être calculée :

diag voie t



$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2$

$t = (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2$

$u = (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2$

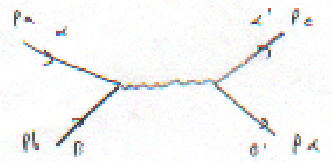
Les règles de Feynman permettent de calculer iT, donc à l'ordre le plus bas on a

$$iT = \frac{-i}{t - M^2} g^2 (p_a + p_c)\cdot(p_b + p_d)\, T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha}\, T^{(\sigma)a}_{\beta'\beta}$$

$$(p_a + p_c)\cdot(p_b + p_d) = (p_a + p_b + p_c - p_b)\cdot(p_a + p_b + p_d - p_a) = s + (p_a + p_b)\cdot(p_d - p_a) + (p_a + p_b)\cdot(p_c - p_b)$$
$$- u = s - u$$

donc $$iT_{(t)} = i g^2 \frac{s-u}{M^2 - t} \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha'\alpha}\, T^{(\sigma)a}_{\beta'\beta}$$

diag voie s (dans le cas où $\rho = \sigma$)



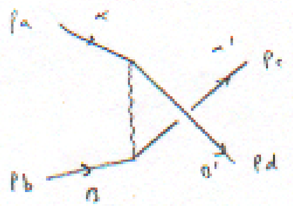
$$\frac{-i}{s - M^2} g^2 (p_a - p_b)\cdot(-p_c + p_d) \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha\beta}\, T^{(\rho)a}_{\alpha'\beta'}$$

$(p_a - p_b)\cdot(-p_c + p_d)$ s'obtient en faisant $p_c \leftrightarrow -p_b$ dans $s-u$ ci-dessus.

$s = (p_c + p_d)^2 \to (-p_b + p_d)^2 = t$

$u = (p_b - p_c)^2$ est invariant $\qquad$ d'où le résultat : $iT_{(s)} = i g^2 \dfrac{t-u}{M^2 - s} \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha\beta}\, T^{(\rho)a}_{\alpha'\beta'}$

diag. voie u (dans le cas où $\rho = \sigma$)



$$\frac{-i}{u - M^2} g^2 (p_a + p_d)\cdot(p_b + p_c) \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha\beta'}\, T^{(\rho)a}_{\beta\alpha'}$$

$(p_a + p_d)\cdot(p_b + p_c)$ s'obtient de $s-u$ en faisant $p_c \leftrightarrow p_d$; s invariant, $u \leftrightarrow t$ $\qquad$ d'où $iT_{(u)} = i g^2 \dfrac{s-t}{M^2 - u} \sum_a T^{(\rho)a}_{\alpha\beta'}\, T^{(\rho)a}_{\beta\alpha'}$

Application : cas de SU(2) et diffusion ππ (isospin $I = 1$) T^a : matrices de representation d'isospin de SU(2)

terme de couplage : $\sum_a T^{(e)a}\, T^{(\sigma)a} = -\sum_a J^{(e)a}\, J^{(\sigma)a}$

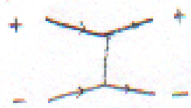
$J_\pm = J_1 \pm i J_2$ $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$

$J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$

$$\sum_a J^{(e)a} J^{(\sigma)a} = \frac{1}{4}\left(J_+^{(e)} + J_-^{(e)}\right)\left(J_+^{(\sigma)} + J_-^{(\sigma)}\right) - \frac{1}{4}\left(J_+^{(e)} - J_-^{(e)}\right)\left(J_+^{(\sigma)} - J_-^{(\sigma)}\right) + J_3^{(e)} J_3^{(\sigma)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(J_+^{(e)} J_-^{(\sigma)} + J_-^{(e)} J_+^{(\sigma)}\right) + J_3^{(e)} J_3^{(\sigma)}$$

* cas d'isospins antiparallèles : $\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-$ (second membre par conservation de I_3)

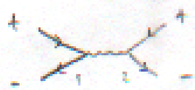


$\langle \pi^+|J_+|\pi^+\rangle = 0$ $\langle \pi^-|J_+|\pi^-\rangle = 0$

$\langle \pi^+|J_-|\pi^+\rangle = 0$ $\langle \pi^-|J_-|\pi^-\rangle = 0$

$\langle \pi^+|J_3|\pi^+\rangle = -\langle \pi^-|J_3|\pi^-\rangle = 1$

La contribution de ce diagramme est donc $T_{(t)} = +g^2 \frac{s-u}{M^2-t}$



$$\frac{1}{2}\Big[\underbrace{(J_+^{(1)})_{-+}}_{0}\underbrace{(J_-^{(2)})_{-+}}_{0} + \underbrace{(J_-^{(1)})_{-+}}_{0}\underbrace{(J_+^{(2)})_{-+}}_{0}\Big] + \underbrace{J^{(1)}_{3\,-+}}_{0}\,\underbrace{J^{(2)}_{3\,-+}}_{0}$$

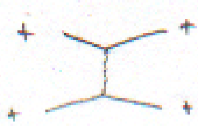
(flèches : $\alpha \to \beta$ $= T^a_{\beta\alpha}$) $= 0$

impossible en pratique car $\rho = (\rho^-, \rho^0, \rho^+)$ pas d'état de charge +2

$$\frac{1}{2}\Big[\underbrace{(J_+^{(1)})_{-+}}_{0}\underbrace{(J_-^{(2)})_{+-}}_{0} + \underbrace{(J_-^{(1)})_{-+}}_{0}\underbrace{(J_+^{(2)})_{+-}}_{0}\Big] + \underbrace{J^{(1)}_{3\,-+}}_{0}\,\underbrace{J^{(1)}_{3\,+-}}_{0} = 0$$

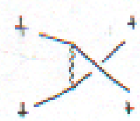
impossible : charge +2 échangée en voie u

* cas d'isospins parallèles : $\pi^+\pi^+ \to \pi^+\pi^+$ (second membre par conservation de I_3)



$T_{(t)} = -g^2 \frac{s-u}{M^2-t}$

impossible :
la charge totale vaut +2
et ρ ne peut avoir une charge +2



$T_{(u)} = -g^2 \frac{s-t}{M^2-u}$

donc $T = -g^2\left[\frac{s-u}{M^2-t} + \frac{s-t}{M^2-u}\right]$

rappel : seuil de voie s : $s \geq 4m^2$ θ^* angle de diffusion (voie en voie s) dans le centre de masse

$u = -\frac{s-4m^2}{2}(1+\cos\theta^*) < 0$ diffusion arrière : $\theta^* \sim \pi$ u petit

$t = -\frac{s-4m^2}{2}(1-\cos\theta^*) < 0$ diffusion avant : $\theta^* \sim 0$ t petit

Considérons la limite de basse énergie :

$\langle v' | iT | v \rangle = -i V \; 2\pi \delta(E' - E)$ (rappel : $L = L_{cin.} - V$)

$\uparrow$ potentiel non relativiste

Dans cette limite $|t|, s - 4m^2, |u| \ll 4m^2$

* $\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-$: $T = g^2 \frac{s-u}{M^2-t} > 0$ donc $V < 0$: potentiel attractif

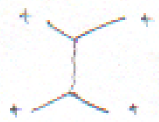
* $\pi^+\pi^+ \to \pi^+\pi^+$: $T = -g^2 \left[\frac{s-u}{M^2-t} + \frac{s-t}{M^2-u} \right]$

$$\sim \frac{-g^2}{M^2} [s - u + s - t] < 0$$

potentiel répulsif

Ceci est en accord avec l'étude faite plus haut :

$\pi^+\pi^+ \to \pi^+\pi^+$



correspond à $I_3 = +2$ en voie $s \Rightarrow I = 2$

idem pour le diagramme correspondant à la contribution en voie u.

Or $X_{++;++} = \frac{1}{2}(C_1 + C_1 - C_2)(\mathcal{M}^{II_3})_{++}(\mathcal{M}^{II_3})_{++} = \frac{1}{2}\underbrace{(C_1 + C_1 - C_2)}_{<0}[(\mathcal{M}^{II_3})_{++}]^2$

et $T = g^2 X_{++;++} \left[\frac{s-u}{M^2-t} + \frac{s-t}{M^2-u} \right]$

Plus généralement, une diffusion entre deux particules d'isospin j_1 et j_2 avec isospin total maximal donnera lieu à un potentiel répulsif

exemple : $\pi^+ K^+ \to \pi^+ K^+$ $(I = \frac{3}{2})$

$\pi^- K^0 \to \pi^- K^0$

Extension : les résultats de la question 5 s'étendent en utilisant la formule de Weyl $C_2(\Lambda) = \langle \Lambda, \Lambda + 2\rho \rangle$ avec $\rho = \sum_j \Lambda_j$. Considérons alors, pour les représentations de plus haut poids Λ_1 et Λ_2, la représentation dont $\Lambda_1 + \Lambda_2$ est le plus haut poids. On a alors $\langle \Lambda_1 + \Lambda_2, \Lambda_1 + \Lambda_2 + 2\rho \rangle = \langle \Lambda_1, \Lambda_1 + 2\rho \rangle + \langle \Lambda_2, \Lambda_2 + 2\rho \rangle$

$+ \underbrace{\langle \Lambda_1, \Lambda_2 + 2\rho \rangle + \langle \Lambda_2, \Lambda_1 + 2\rho \rangle}_{>0}$ d'où le résultat