M2/CFP/Parcours de Physique Théorique
Invariances en physique et théorie des groupes

Rappels de cinématique relativiste

Exercice 1: Vitesse relative

Soit deux particules d'impulsions p^μ et q^μ. Donner une expression covariante de leur vitesse relative, definie comme étant la vitesse de l'une dans le référentiel où l'autre est au repos. On pourra calculer $p \cdot q$ dans le référentiel de repos de l'une des particules.

Exercice 2: Expériences de cible fixe et collisionneurs

1. On envoie une particule de masse m, d'énergie cinétique K (c'est l'énergie totale moins l'énergie au repos, i.e $K = E - m$), sur une particule identique au repos (expérience dite de *cible fixe*). Calculer l'énergie dans le référentiel du centre de masse.

2. On accélère deux particules d'impulsions opposées, de masse m et d'énergie cinétique K^* (collisionneur de particules). Que doit valoir K dans l'expérience de cible fixe de la question 1 pour atteindre la même énergie dans le référentiel du centre de masse? Discuter les limites $K^* \ll m$ et $K^* \gg m$. Expliquer pourquoi la plupart des expériences actuelles de physique des hautes énergies se font au moyen de collisionneurs (LEP au CERN, HERA à Hambourg, Tevatron au Fermilab près de Chicago, SLC à Stanford, LHC, projets ILC et CLIC de collisionneur linéaire $e^+ - e^-$).

Le collisionneur RHIC, à Brookhaven (près de New-York) fait entrer en collision deux faisceaux de noyaux de plomb à des énergies de 100 GeV par nucléon. Calculer l'énergie K d'une expérience équivalente de cible fixe. On comparera le résultat à l'énergie la plus haute disponible actuellement dans ce type d'expériences, au SPS du CERN qui accélère du plomb à 160 GeV par nucléon.

3. On fait entrer en collision deux faisceaux de particules ultrarelativistes ($E \gg m$) de même direction et de sens opposés, d'énergie respectives E_1 et E_2. Calculer l'énergie dans le centre de masse.
Le collisonneur HERA fait entrer en collision des protons de 800 GeV avec des électrons de 30 GeV. Calculer l'énergie dans le référentiel du centre de masse.

Exercice 3: Photoproduction de pions

Soit la réaction $\gamma p \to \pi^0 p$, où p désigne un proton, de masse $M = 939$ MeV, γ un photon et π^0 le pion neutre, de masse $m \simeq 135$ MeV. On note respectivement P, $k = (k^0, \vec{k})$ et

$q = (q^0, \vec{q})$ les quadrivecteurs impulsion du proton incident, du photon incident et du pion émis.

1. On suppose le proton initialement au repos. Calculer, littéralement puis numériquement, l'énergie minimale que doit avoir le photon pour que la réaction $\gamma p \to \pi^0 p$ soit possible.

2. Calculer l'énergie du photon incident en fonction de l'énergie q^0 du pion émis et de l'angle θ de l'impulsion du pion avec la direction du photon incident.

3. A quoi se réduisent les résultats précédents dans le limite où m et k^0 sont très petits devant M? Commenter.

4. Cette réaction joue un rôle important dans la physique des rayons cosmiques de haute énergie: en effet, l'univers est baigné de photons (le rayonnement cosmologique à 3K) et des protons de très haute énergie peuvent entrer en collision avec ces photons et produire des pions, ce qui les ralentit. Considérons donc une collision entre un proton d'énergie E et un photon d'énergie $k^0 = 10^{-3}$ eV allant en sens inverse (c'est l'ordre de grandeur d'une énergie présente dans le rayonnement à 3 K). Calculer la valeur minimale E pour que la réaction soit possible. Cette coupure porte le nom de Greisen-Zatsepin-Kuzmin (1966). Une des énigmes actuelles de l'étude des rayons cosmiques est liée au fait que l'on observe cependant des rayons cosmiques au-delà de cette énergie.

Exercice 4: Effet Compton

L'effet Compton est la collision élastique d'un photon d'impulsion $\vec{k}$ avec un électron de masse m et d'impulsion $\vec{p}$. On notera $\vec{k'}$ l'impulsion du photon diffusé, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ l'énergie et θ l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{p}$.

1. Vérifier que $p \cdot k = (p + k) \cdot k'$.
En déduire que l'énergie du photon diffusé vaut

$$|\vec{k'}| = \frac{E - p\cos\theta}{E + |\vec{k}| - \hat{k}' \cdot (\vec{p} + \vec{k})} |\vec{k}| \tag{1}$$

en notant $\hat{k}' \equiv \vec{k'}/|\vec{k'}|$ la direction de $\vec{k'}$.

2. On suppose l'électron au repos. Calculer la longueur d'onde λ' du photon diffusé en fonction de la longueur d'onde λ du photon incident, de la longueur d'onde de Compton de l'électron définie par $\lambda_C = h/mc$, et de l'angle θ' entre $\vec{k}$ et $\vec{k'}$.

3. Dans le cas plus général où $\vec{p} \neq \vec{0}$,déduire de l'équation (1) l'énergie maximale du photon diffusé pour θ fixé.

4. On suppose l'électron ultrarelativiste. Vérifire que dans la limite où le photon ets de basse

énergie,

$$|\vec{k'}|_{\max} = \left(\frac{2E\sin(\theta/2)}{m}\right)^2 |\vec{k}|\,. \tag{2}$$

Préciser à quelle condition sur $|\vec{k}|$ cette équation est valable. Vérifier la validité des approximations et calculer $|\vec{k'}|_{\max}$ dans le cas d'un faisceau laser d'énergie 1 eV interagissant avec un faisceau d'électrons de $E = 4$ GeV allant en sens inverse. Ce sont les valeurs approximatives correspondant au polarimètre Compton du laboratoire Jefferson, en Virginie (USA). Un tel dispositif permet, en utilisant un laser polarisé, de mesurer la polarisation du faisceau d'électron. Il permet également d'obtenir des photons de haute énergie partiellement polarisés.

Exercice 5: Diffusion d'électrons

Dans cet exercice , on considère la diffusion, élastique ou inélastique, d'un électron ultra-relativiste (on négligera sa masse) sur une cible. On note $K = (k, \vec{k})$ et $K' = (k', \vec{k'})$ les quadrivecteurs d'énergie impulsion de l'électron avant et après la collision, et $P = (E, \vec{p})$ et P' ceux de la cible, dont la masse initiale est M. On supposera que $\vec{k}$ et $\vec{p}$ sont collinéaires et de sens opposés.
Si la collision est élastique, l'énergie k' de l'électron sortant est fonction de l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{k'}$ (voir l'exercice précédent). Dans cet exercice, cet angle sera noté θ. Dans le cas plus général d'une collision inélastique, k' et θ sont des variables indépendantes.

1. On choisit ordinairement, plutôt que k' et θ, les variables invariantes de Lorentz Q^2 et $P \cdot q$, où $q \equiv K - K'$. calculer ces deux quantités en fonction de k', θ, E et k. Quel est le signe de q^2? Traditionnellement, on pose $Q^2 = -q^2$.

2. Soit une collision qui transforme la cible en une particule de masse M', avec $M' > M$. Quelle est la relation entre Q^2 et $P \cdot q$? En déduire le signe de $P \cdot q$. Lorsque M' est proche de M, une telle collision est dite quasi-élastique.

3. Supposons que l'électron effectue une collision élastique avec une partie de la cible de quadrivecteur impulsion xP, avec $0 \leq x \leq 1$, le reste de la cible ne participant pas à la collision. Exprimer x en fonction de Q^2 et $P \cdot q$. Une telle collision est dite *profondément inélastique* lorsque Q^2 est grand. Dans le cas de la diffusion profondément inélastique à haute énergie (plusieurs GeV) sur un proton, on interprète x comme la fraction d'impulsion portée par le quark (constituant du proton) heurté par l'électron.

4. Dessiner, dans le plan des variables Q^2 et $P \cdot q$, les lignes correspondant aux collisions profondément inélastiques (x fixé).

5. On suppose la cible au repos. Dessiner alors, dans le plan des variables Q^2 et $P \cdot q$, les lignes correspondant à k' fixé et celles correspondant à θ fixé. En déduire la région du plan permise par les contraintes cinématiques. Calculer la valeur maximale de Q^2 pour x donné,

dans la limite où $k \gg M$.

6. Reprendre la question précédente lorsque la cible est en mouvement ultrarelativiste, à une énergie $E \gg M$. Dans le cas du collisionneur HERA à Hambourg, $k = 30$ GeV et la cible est un proton arrivant en sens contraire d'énergie $E = 800$ GeV. Calculer la valeur maximale de Q^2 pour $x = 10^{-4}$. Quel est l'intérêt d'accélérer ainsi les protons?