M2/CFP/Parcours de Physique Théorique
Invariances en physique et théorie des groupes

Caractères de SU(2)

Soit $\mathcal{D}(j)$ une représentation de dimension $2j+1$ du groupe $SU(2)$. Pour tout élément $U \in SU(2)$, on définit le caractère

$$\chi_j(U) = \mathrm{Trace}\,\mathcal{D}(j) = \sum_{m=-j}^{m=+j} < jm|\mathcal{D}(j)|jm > \tag{1}$$

1) Soit $U(\theta, \vec{k})$ la rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{k}$ ($\parallel Oz$). Calculer $\chi_j[U(\theta, \vec{k})]$.

2) Montrer que χ ne dépend pas de l'axe de rotation, en d'autres termes pour toute rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$, on a

$$\chi_j[U(\theta, \vec{k})] = \chi_j[U(\theta, \vec{n})]\,. \tag{2}$$

3) Application : un atome de moment cinétique j est plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B}$. Le hamiltonien d'interaction est

$$H = -\mu \vec{J} \cdot \vec{B}\,. \tag{3}$$

Déduire des résultats précédents la fonction de partition

$$Z(\beta) = \mathrm{Trace}\; e^{-\beta H}\,. \tag{4}$$

4) Montrer que les caractères vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int_0^{2\pi} d\theta\,(1-\cos\theta)\,\chi_j[U(\theta)]\,\chi_{j'}[U(\theta)] = 2\pi\delta_{jj'}\,. \tag{5}$$

5) a. Calculer le caractère de la représentation

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\right) \otimes \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\right) \cdots \otimes \mathcal{D}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (n\,\text{fois}) \tag{6}$$

b. En déduire sous forme intégrale le nombre d'états de spin j obtenus en couplant n particules de spin 1/2. On montrera que

$$N_j = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^n\phi\, \sin(2j+1)\phi\, \sin\phi\, d\phi \tag{7}$$

On se restreindra dans la suite au cas où n est pair. On donne

$$N_j = \frac{(2j+1)\,n!}{\left(\frac{n}{2}+j+1\right)!\,\left(\frac{n}{2}-j\right)!} \tag{8}$$

6) On considère l'état obtenu en couplant $\frac{n}{2}+j$ particules décrites par le ket $|S\,S_z >= |\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$ et $\frac{n}{2}-j$ particules décrites par le ket $|S\,S_z' >= |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$.

a. Cet état a-t-il un spin fixé ? Comment peut-on le caractériser ?

b. Calculer le nombre $\phi(j)$ de tels états.

c. Montrer que le nombre d'états de spin j est

$$N_j = \phi(j) - \phi(j+1)\,. \tag{9}$$

d. En déduire le nombre total d'états obtenus en couplant n particules de spin 1/2.