M2/CFP/Parcours de Physique Théorique

Invariances en physique et théorie des groupes

Action d'un groupe sur un ensemble E

Soit E un ensemble, G un groupe. On dit que le groupe G agit dans l'ensemble E s'il existe un homomorphisme β de G dans le groupe des bijections de E dans lui-même.

1. Écrire précisément les conditions requises.

[**Corrigé** : $g \mapsto \beta(g) \in \mathrm{Bij}(E)$, $g^{-1} \mapsto \beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$, $g_1.g_2 \mapsto \beta(g_1.g_2) = \beta(g_1).\beta(g_2)$, $\beta(e) = id_E$]

On définit l'orbite $O(x)$ d'un point $x \in E$ comme l'ensemble des images $\beta(g)x$ pour $g \in G$.

2. Montrer que l'appartenance à une même orbite est une relation d'équivalence.

[**Corrigé** : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = \beta(g)x$, réflexif : $x = \beta(e)x$, symétrique $x = \beta(g^{-1})y$, transitif : $x = \beta(g)y$ et $y = \beta(g')z \Rightarrow x = \beta(g)\beta(g')z = \beta(g \cdot g')z$]

3. Exemple : action du groupe $\mathrm{O}(n)$ sur l'espace R^n. Que sont les orbites ?

[**Corrigé** : sphères de centre O ou origine O]

4. Un espace est homogène s'il n'a qu'une seule orbite. Exemple trivial : R^n sous l'action des translations. Plus généralement, qu'en est-il de l'action à gauche de G sur lui-même, avec $E = G$?

[**Corrigé** : G homogène car $\forall x, y\ \exists g = y.x^{-1}\ :\ g.x = y$]

Donner d'autres exemples d'espaces homogènes pour $G = \mathrm{O}(3)$ ou $\mathcal{L}$ =O(3,1) (et ses sous-groupes).

[**Corrigé** : sphère dans R^3 pour $G = \mathrm{O}(3)$, cône de lumière, hyperboloïde $p^2 > 0$ et hyperboloïde $p^2 < 0$ pour $G = \mathrm{O}(3,1)$, en plus hyperboloïde $p^2 > 0$, $p^0 > 0$ et hyperboloïde $p^2 > 0$, $p^0 < 0$ pour $\mathcal{L}^{\uparrow}$.]

5. On définit aussi le *groupe d'isotropie*, (appelé aussi *stabilisateur*, ou, par les physiciens, *petit groupe*) $S(x)$ de l'élément $x \in E$: c'est le sous-groupe de G laissant x invariant :

$$S(x) = \{g \in G | \beta(g)x = x\} \ .$$

Montrer que si x et y appartiennent à la même orbite, leurs groupes d'isotropie sont conjugués.

Rappel : si H est un sous-groupe du groupe G, on appelle sous-groupe conjugué de H tout sous-groupe de la forme gHg^{-1} avec $g \in G$.

[**Corrigé** : Si $y \sim x$ donc $\exists g \in G : y = \beta(g)x$, considérons $S(y) = \{g' | \beta(g')y = y\}$, donc $\beta(g')\beta(g)x = \beta(g)x$ donc $\beta(g^{-1}g'g)x = x$ c'est-à-dire $g^{-1}g'g \in S(x)$, donc $g^{-1}S(y)g \subset S(x)$ et en fait en inversant les opérations, $g^{-1}S(y)g = S(x)$, qed.]

Quel est le groupe d'isotropie d'un point $x \in \mathrm{R}^n$ sous l'action de $\mathrm{SO}(n)$? d'un vecteur de genre temps p dans l'espace de Minkowski ?

[**Corrigé** : $S(x) \approx \mathrm{SO}(n-1)$; $S(p) = \mathrm{O}(3)$ si $p = \overset{0}{p} = (m, \vec{0})$ donc de façon générale, un groupe conjugué à $\mathrm{O}(3)$: $p = \Lambda\overset{0}{p}$, $\forall R \in \mathrm{O}(3)$, $\Lambda R \Lambda^{-1} p = p$.]

Le stabilisateur $S(x)$ est-il un sous-groupe invariant ?

[**Corrigé** : en général non, puisqu'on sait qu'un sous-groupe invariant est égal à tous ses conjugués : si $S(x)$ était invariant, il serait égal à tous les stabilisateurs $S(y)$ des points y de $O(x)$. En effet, si $y \in O(x)$, $\exists g \in G$ tel que $g^{-1}\,S(x)\,g = S(y)$. Or $g^{-1}\,S(x)\,g = S(x)$ ce qui conduit à $S(x) = S(y)$. Dans le cas de $\mathrm{SO}(3)$, par exemple, ceci est clairement absurde ...]

6. Montrer qu'il existe une bijection entre les points de l'orbite $O(x)$ et l'ensemble quotient $G/S(x)$.

[**Corrigé** : ($g \sim g'$ en ce sens que $g'^{-1}g = h \in S(x)$) $\Leftrightarrow \beta(g)x = \beta(g')\beta(h)x = \beta(g')x$ donc g et g' sont équivalents (même left coset) par rapport à $S(x)$ sissi ils définissent le même point sur l'orbite $O(x)$.]

Pour un groupe fini G, en déduire une relation entre les ordres de G, de $O(x)$ et de $S(x)$.

[**Corrigé** : $\forall x \ |G| = |O(x)| \times |S(x)|$.]

Cet ensemble $G/S(x)$ est-il un espace homogène pour l'action de G ?

[**Corrigé** : Cet ensemble est bien un espace homogène pour l'action de G puisque toute orbite l'est.]

Le sujet du chapitre 2 porte sur le cas particulier où E est un espace vectoriel avec comme bijections les transformations linéaires du groupe $\mathrm{GL}(E)$: on parle alors de representations du groupe G dans E.