M2/CFP/Parcours de Physique Théorique

Invariances en physique et théorie des groupes

Action d'un groupe sur un ensemble E

Soit E un ensemble, G un groupe. On dit que le groupe G agit dans l'ensemble E s'il existe un homomorphisme β de G dans le groupe des bijections de E dans lui-même.

1. Écrire précisément les conditions requises.

On définit l'orbite $O(x)$ d'un point $x \in E$ comme l'ensemble des images $\beta(g)x$ pour $g \in G$.

2. Montrer que l'appartenance à une même orbite est une relation d'équivalence.

3. Exemple : action du groupe $\mathrm{O}(n)$ sur l'espace R^n. Que sont les orbites ?

4. Un espace est homogène s'il n'a qu'une seule orbite. Exemple trivial : R^n sous l'action des translations. Plus généralement, qu'en est-il de l'action à gauche de G sur lui-même, avec $E = G$?

Donner d'autres exemples d'espaces homogènes pour $G = \mathrm{O}(3)$ ou $\mathcal{L} =$O(3,1) (et ses sous-groupes).

5. On définit aussi le *groupe d'isotropie*, (appelé aussi *stabilisateur*, ou, par les physiciens, *petit groupe*) $S(x)$ de l'élément $x \in E$: c'est le sous-groupe de G laissant x invariant :

$$S(x) = \{g \in G | \beta(g)x = x\} \ .$$

Montrer que si x et y appartiennent à la même orbite, leurs groupes d'isotropie sont conjugués.

Rappel : si H est un sous-groupe du groupe G, on appelle sous-groupe conjugué de H tout sous-groupe de la forme gHg^{-1} avec $g \in G$.

Quel est le groupe d'isotropie d'un point $x \in \mathrm{R}^n$ sous l'action de $\mathrm{SO}(n)$? d'un vecteur de genre temps p dans l'espace de Minkowski ?

Le stabilisateur $S(x)$ est-il un sous-groupe invariant ?

6. Montrer qu'il existe une bijection entre les points de l'orbite $O(x)$ et l'ensemble quotient $G/S(x)$.

Pour un groupe fini G, en déduire une relation entre les ordres de G, de $O(x)$ et de $S(x)$.

Cet ensemble $G/S(x)$ est-il un espace homogène pour l'action de G ?

Le sujet du chapitre 2 porte sur le cas particulier où E est un espace vectoriel avec comme bijections les transformations linéaires du groupe $\mathrm{GL}(E)$: on parle alors de representations du groupe G dans E.