M2/CFP/Parcours de Physique Théorique

Invariances en physique et théorie des groupes

Transformations conformes

A - 1. Sous une transformation de dilatation $x'^\mu = x^\mu + \delta\lambda\, x^\mu$, $a^\mu(x) = \delta\lambda\, x^\mu$ et $\partial_\mu a_\nu = \delta\lambda\delta_{\mu\nu}$. D'après la relation rappelée dans l'énoncé, l'action se transforme suivant $\delta S = \int d^dx\, (\partial_\mu a_\nu)\, \theta^{\mu\nu}(x) = \delta\lambda \int d^dx \theta^\mu_\mu(x) = 0$ puisque $\theta^\mu_\mu(x) = 0$ par hypothèse.

2.a) Sous une transformation infinitésimale $x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$,

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = dx^\mu + \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu}\, dx^\nu$$

et donc

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\nu}\,.$$

La relation de définition de la transformation conforme s'écrit donc

$$\alpha(x)\, g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x') \left(dx^\mu + \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma \right) \left(dx^\nu + \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\tau}\, dx^\tau \right)\,. \qquad (1)$$

En utilisant la relation

$$g_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\, a^\alpha$$

l'expression (1) devient

$$\alpha(x) g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = \left[g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\, a^\alpha \right] \left[dx^\mu + \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma \right] \left[dx^\nu + \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\tau}\, dx^\tau \right]$$

soit à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \alpha(x)\, g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma dx^\nu + g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\tau} dx^\mu dx^\tau \\ &+ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\, a^\alpha dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \alpha(x)\, g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + g_{\rho\nu}(x) \frac{\partial a^\rho}{\partial x^\mu}\, dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\rho}(x) \frac{\partial a^\rho}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &+ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\, a^\rho dx^\mu dx^\nu\,. \end{aligned}$$

i.e.

$$\left[\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu + g_{\mu\nu}(1-\alpha(x)) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\; a^\rho\right] dx^\mu dx^\nu = 0\,.$$

$dx^\mu dx^\nu$ étant symétrique, on doit donc annuler la partie symétrique du tenseur [...]. Or ce tenseur est lui-même symétrique. La condition devient donc

$$\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu + g_{\mu\nu}(1-\alpha(x)) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\; a^\rho = 0\,.$$

On calcule $1-\alpha(x)$ en prenant la trace : comme $g^\mu_\mu = d$, on a, puisque $\frac{\partial g^\mu_\mu}{\partial x^\rho} = 0$,

$$\partial_\nu a^\nu + \partial_\nu a^\nu + g^\nu_\nu(1-\alpha(x)) = 0 \Longleftrightarrow 2\,\partial_\rho a^\rho + d\,(1-\alpha(x)) = 0$$

soit $1-\alpha(x) = -\frac{2}{d}\partial_\rho a^\rho$, et donc

$$\boxed{\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\; a^\rho = \frac{2}{d}\, g_{\mu\nu}\,\partial^\rho a_\rho\,.} \tag{2}$$

b) Dans le cas où

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}-1\\ \ddots\\ -1\end{matrix}}\right\} d-p \end{array} \quad , \text{ on a } \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = 0\,,$$

et la condition (2) se réduit donc à

$$\boxed{\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu = \frac{2}{d}\; g_{\mu\nu}\partial_\rho a^\rho\,.} \tag{3}$$

3. L'action se transforme suivant

$$\delta S = \int d^dx\,(\partial_\mu a_\nu)\,\theta^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c}\int d^dx\,(\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu)\,\theta^{\mu\nu}(x)$$

par symétrie de $\theta^{\mu\nu}$. En utilisant (3) on en déduit donc que

$$\delta S = \frac{1}{d}\int d^dx\,\partial^\rho a_\rho\, g_{\mu\nu}\,\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{d}\int d^dx\,\partial^\rho\, a_\rho\,\theta^\mu_\mu = 0$$

puisque par hypothèse $\theta^{\mu\nu}$ est de trace nulle.

Ainsi toute théorie définie sur un espace euclidien ou pseudo-euclidien invariante par translations, rotations et dilatations l'est aussi sous les transformations conformes.

B - 1

Une transformation conforme spéciale est la succession d'une inversion, puis d'une translation, puis d'une inversion, ce qui s'écrit

$$x^{(1)\mu} = \frac{x^\mu}{x^2} \qquad x^{(2)\mu} = x^{(1)\mu} + a^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu = \frac{x^\mu + x^2 a^\mu}{x^2}$$

$$x'^\mu = \frac{x^{(2)\mu}}{x^{(2)^2}} = \qquad x^{(2)^2} = \frac{x^2 + 2x^2 a\cdot x + x^4 a^2}{x^4} = \frac{1 + 2ax + x^2 a^2}{x^2}$$

d'où finalement

$$\boxed{x'^\mu = \frac{x^\mu + x^2 a^\mu}{1 + 2a\cdot x + x^2 a^2}} \tag{4}$$

La forme infinitésimale s'obtient en développant au premier ordre, ce qui donne, en écrivant

$$1 + 2a\cdot x + x^2 a^2 \sim 1 + 2a^\mu x_\mu \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 + 2\, a^\mu x_\mu} \sim 1 - 2a^\mu x_\mu\,,$$

$$x'^\mu \sim \left(x^\mu + x^2 a^\mu\right)(1 - 2a^\mu x_\mu) = x^\mu + x^2 a^\mu - 2a^\nu x_\nu x^\mu = x^\mu + x^2 a^\mu - 2(a\cdot x)x^\mu$$

2.

Générateur des translations d'espace-temps :

$$P_\mu = i\,\partial_\mu \tag{5}$$

Générateurs des transformations de Lorentz :

$$J_{\mu\nu} = i\,(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \tag{6}$$

Générateur des dilatations :

$$D = i\, x^\mu \partial_\mu \tag{7}$$

puisque

$$f((1+\delta\lambda)x^\mu = f(x) + \delta\lambda\, x^\mu \partial_\mu f = (1 - iD\,\delta\lambda) f$$

Générateur des transformations spéciales :

$$K_\rho = i(x^2 \partial_\rho - 2\, x_\rho x^\mu \partial_\mu) \tag{8}$$

puisque

$$f\left(x^\mu + x^2 a^\mu - 2x^\mu a^\nu x_\nu\right) = f(x) + \left(x^2 a^\mu - 2x^\mu a^\nu x_\nu\right)\partial_\mu f = \left(1 - i k_\rho a^\rho\right) f$$

3.

Les relations de commutation déjà connues sont :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} [J_{\mu\nu}, P_\rho] & = & i\left(g_{\nu\rho} P_\mu - g_{\mu\rho} P_\nu\right) \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] & = & i\left(g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}\right) \\ [P_\mu, P_\nu] & = & 0\,. \end{array}} \tag{9}$$

Les autres relations de commutation s'obtiennent facilement en remarquant que

$$D = x^\nu P_\nu \tag{10}$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu \tag{11}$$

$$K_\rho = -x^\nu J_{\rho\nu} - x_\rho D\,. \tag{12}$$

Notons tout d'abord que

$$[P_\mu, x_\nu] = i\,[\partial_\mu, x_\nu] = i\, g_{\mu\nu} \tag{13}$$

et

$$[J_{\mu\nu}, x_\sigma] = i\,[x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, x_\sigma] = i\left(x_\mu g_{\nu\sigma} - x_\nu g_{\mu\sigma}\right). \tag{14}$$

En utilisant les relations

$$[A\,B, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B \text{ et } [A, B\,C] = [A, B]\,C + B\,[A, C]$$

nous pouvons à présent aisément obtenir les relations cherchées :

$$[P_\mu, D] = [P_\mu, x^\nu P_\nu] = i\, g_\mu^\nu P_\nu$$

soit

$$\boxed{[P_\mu, D] = i\, P_\mu\,.} \tag{15}$$

$$[J_{\mu\nu}, D] = [J_{\mu\nu}, x^\sigma P_\sigma] = [J_{\mu\nu}, x^\sigma] P_\sigma + x^\sigma [J_{\mu\nu}, P_\sigma] = i(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu) + i(x_\nu P_\mu - x_\mu P_\nu)$$

soit

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, D] = 0\,.} \tag{16}$$

$$[K_\rho, D] = -[x^\nu, D]J_{\rho\nu} - [x_\rho, D]D = i\,x^\nu J_{\rho\nu} + i\,x_\rho D$$

soit

$$\boxed{[K_\rho, D] = -iK_\rho\,.} \tag{17}$$

Enfin

$$\begin{aligned}&[J_{\mu\nu}, K_\rho] = i\,x^\sigma(-g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho})\\ &-i\,x_\mu J_{\rho\nu} + i\,x_\nu J_{\rho\mu} - i\,x_\mu\,g_{\nu\rho}D + i\,x_\nu\,g_{\mu\rho}D\end{aligned}$$

soit encore

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, K_\rho] = i\,g_{\nu\rho}K_\mu - i\,g_{\mu\rho}K_\nu}\,. \tag{18}$$

D'après les relations de commutation obtenues ci-dessus il est clair qu'elles se ferment bien sur les générateurs P, J, D et K.

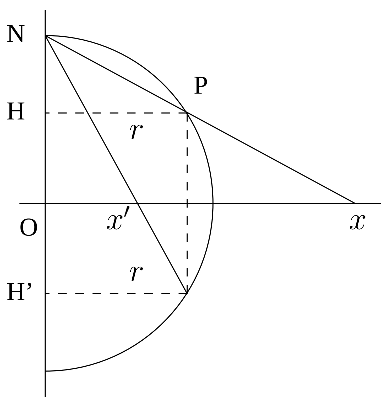
4.

Nombre de générateurs :

$$\begin{array}{rl} P_\mu & d \\ J_{\mu\nu} & \dfrac{d(d-1)}{2} \\ D & 1 \\ K_\mu & d \end{array}$$

soit au total $\frac{d^2+3d+2}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ générateurs. On notera que cette dimension de l'algèbre de Lie du groupe conforme est identique à celle de $so(d+2)$.

C - 1



$$\frac{r}{x} = \frac{NH}{ON} = NH \quad (ON = 1) \text{ et } OH = r_{d+1}\,.$$

Or

$$NH = 1 - r_{d+1} \quad \text{donc} \quad r_{d+1} = 1 - NH = 1 - \frac{r}{x}\,.$$

On tire donc de $r_{d+1}^2 + r^2 = 1$ que

$$\left(1 - \frac{r}{x}\right)^2 + r^2 = 1\,,$$

d'où

$$\boxed{1 + x^2 = \frac{2x}{r}\,.} \tag{19}$$

Enfin de

$$r_{d+1} = 1 - \frac{r}{x} = 1 - \frac{2}{1+x^2}$$

on tire

$$\boxed{r_{d+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}\,.} \tag{20}$$

Lorsque $\vec{x} \to \infty,\ P \to N$.

Sous la transformation $\vec{x} \to \frac{\vec{x}}{x^2} (= \vec{x}')$, (19) est invariante, i.e. r est inchangé, et donc $\vec{r}$ est inchangé (l'inversion ne modifie pas la direction de $\vec{x}$).

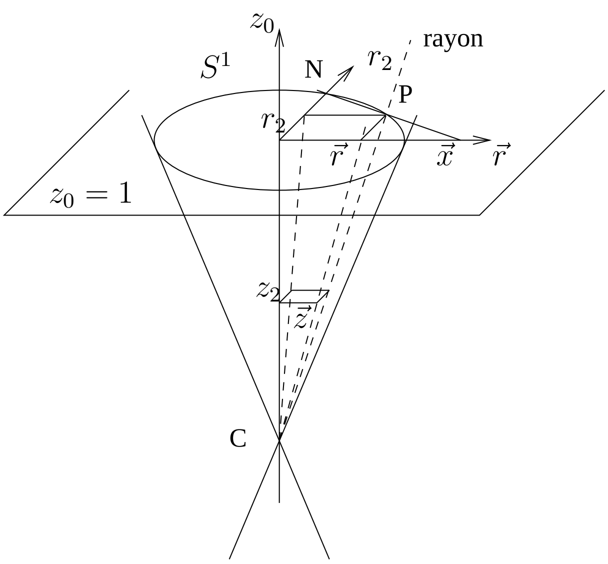
En revanche le second membre de (20) est transformé en son opposé :

$$r'_{d+1} = \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\,,$$

donc $r_{d+1} \to -r_{d+1}$. Ainsi :

L'inversion correspond à une symétrie par rapport à l'hyperplan $I\!R^d$.

2. *ex : illustration pour d=1*



Soit $z = (z_0, \vec{z}, z_{d+1})$ un point du cône de lumière $\mathcal{C}$. Son intersection avec l'hyperplan $z_0 = 1$ est le point $z_{S^d} = \left(1, \frac{\vec{z}}{z_0}, \frac{z_{d+1}}{z_0}\right)$ qui appartient à S^d puisque $z_0^2 = \vec{z}^2 + z_{d+1}^2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{\vec{z}}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{z_{d+1}}{z_0}\right)^2$.

Posons $\vec{r} = \frac{\vec{z}}{z_0}$ et $r_{d+1} = \frac{z_{d+1}}{z_0}$. D'après la question précédente,

$$x = \frac{r}{1 - r_{d+1}}$$

qui s'écrit encore

$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{z}}{z_0 - z_{d+1}}.} \tag{21}$$

Remarque : x peut s'écrire à l'aide de r grâce à

$$x^2 - \frac{2x}{r} + 1 = 0 \qquad \text{de discriminant réduit} \qquad \Delta' = \frac{1}{r^2} - 1$$

qui a pour solution

$$x_\pm = \frac{1}{r} \pm \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}$$

et

$$\begin{array}{l} \text{a) } r_{d+1} > 0 : \text{alors } x > r \text{ donc } x = \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} \\ \text{b) } r_{d+1} < 0 : \text{alors } x < r \text{ donc } x = \frac{1}{r} - \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} \end{array} .$$

en effet :

$$\frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} = \frac{1}{r}\left[1 + \sqrt{1 - r^2}\right] > r \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 - r^2} > r^2 \quad \Leftrightarrow 1 - r^2 > 1 - 2r^2 + r^4$$

qui est vrai puisque $r < 1 \Leftrightarrow r^4 < r^2$.

3. Les transformations linéaires qui préservent le cône de lumière sont des transformations du groupe de Lorentz de $\mathcal{M}_{d+1,1}$ (à des dilatations près).

En effet, soit L une transformation qui préserve le cône de lumière, i.e.

$$\forall X \in {}^tXGX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tL\,G\,L\,X = 0\,.$$

On peut alors montrer que $G = \lambda{}^tL\,G\,L$. Puisque l'on travaille a des dilatations près (on considère les transformations qui préservent les rayons du cone de lumière, on peut faire $\lambda = 1$, ce qui donne $G = {}^tL\,G\,L$, qui constitue la relation de définition des transformations de Lorentz.

Montrons plus généralement que deux formes quadratiques qui sont simultanément dégénérées sont proportionnelles, la situation précédente étant un cas particulier de ce théorème général. La preuve repose sur la géométrie analytique élémentaire.

Soient F et F' deux formes quadratiques, définies sur R^d. L'équation $F(x) = 0$ définit une surface $\mathcal{S}$ à $d-1$ dimensions (dans le cas de la forme $F(x) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

cette surface est le cône de lumière $\mathcal{C}$). Par définition d'une forme quadratique, l'origine O appartient à $\mathcal{S}$. Soit P un point de $\mathcal{S}$ distinct de O. L'équation de définition de $\mathcal{S}$ dans les nouvelles variables $\tilde{x}_i = x_i - x_P$ (coordonnées d'origine P) peut s'écrire

$$Q(\tilde{x}_i) + L(\tilde{x}_i) = 0$$

où Q et L sont respectivement des formes quadratiques et linéaires. De même l'équation $F'(x_i) = 0$ s'écrit dans les nouvelles variables :

$$Q'(\tilde{x}_i) + L'(\tilde{x}_i) = 0$$

Soit un vecteur $\vec{x}^0$ de coordonnées $\tilde{x}_i^0$. La droite Δ passant par P et portée par $\vec{x}^0$ a pour équations paramétriques $\tilde{x}_i = \lambda\, \tilde{x}_i^0$, et l'intersection de $\mathcal{S}$ avec Δ s'écrit donc

$$\lambda^2\, Q(\tilde{x}_i^0) + \lambda\, L(\tilde{x}_i^0) = 0$$

ou de façon équivalente

$$\lambda^2\, Q'(\tilde{x}_i^0) + \lambda\, L'(\tilde{x}_i^0) = 0\,.$$

Ces équations ont génériquement deux racines, qui correspondent à deux intersections (l'une étant P). L'équation du plan tangent en P correspond donc au cas dégénéré

$$L(\tilde{x}_i^0) = 0$$

ou encore

$$L'(\tilde{x}_i^0) = 0\,.$$

Ces deux formes linéaires sont donc proportionnelles :

$$\exists \kappa / L(\tilde{x}_i) = \kappa\, L'(\tilde{x}_i)\,.$$

Dans le cas général où la droite Δ n'est pas dans le plan tangent en P, en écrivant que le second point d'intersection de Δ avec $\mathcal{S}$ est défini par la donnée d'un unique λ, on doit avoir

$$\lambda = -\frac{L(\tilde{x}_i^0)}{Q(\tilde{x}_i^0)} = -\frac{L'(\tilde{x}_i^0)}{Q'(\tilde{x}_i^0)}$$

et donc

$$\frac{Q'(\tilde{x}_i^0)}{Q(\tilde{x}_i^0)} = -\frac{L'(\tilde{x}_i^0)}{L(\tilde{x}_i^0)} = \kappa\,,$$

d'où l'on tire finalement que

$$Q'(\tilde{x}_i) + L'(\tilde{x}_i) = \kappa \, [Q(\tilde{x}_i) + L(\tilde{x}_i)]$$

ce qui achève la preuve (si $Q(\tilde{x}_i^0) = 0$, alors $L(\tilde{x}_i^0) = 0$, et donc $Q'(\tilde{x}_i^0) = 0$ et $L'(\tilde{x}_i^0) = 0$).

3. a. Rotations :

A une rotation de $\vec{x} \in I\!R^d$ correspond la transformation

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \dfrac{2\vec{x}}{\vec{x}^{\,2} + 1} \\ \\ r_{d+1} = \dfrac{\vec{x}^{\,2} - 1}{\vec{x}^{\,2} + 1} \end{array} \right.$$

donc $\vec{r}$ subit la même rotation et r_{d+1} est inchangé, ce qui montre que $\vec{z}$ subit la même rotation que $\vec{x}$.

Ainsi à une rotation de $\vec{x} \in I\!R^d$ correspond une rotation dans l'hyperplan $I\!R^d$ de $I\!R^{d+1}$.

b. Dilatation :

La transformation

$$\vec{r} = \frac{2\vec{x}}{\vec{x}^{\,2} + 1} \overset{\vec{x} \to \lambda \vec{x}}{\longrightarrow} \frac{2\lambda\vec{x}}{\lambda^2 \vec{x}^{\,2} + 1}$$

ne change pas la direction et le sens de $\vec{x}$.

On peut compenser la dilatation de $\vec{r}$ en changeant z_0 :

$$\text{alors on aura} \left| \begin{array}{l} {z'}_0^2 - {z'}_{d+1}^2 = z_0^2 - z_{d+1}^2 \\ \vec{z} = \text{ cste} \end{array} \right. \quad : \text{boost dans le plan } (z_0, z_{d+1})$$

$$\left| \begin{array}{l} z = z_0 \; r \\ z_{d+1} = z_0 \; r_{d+1} \end{array} \right. \quad \overset{\text{dilatation}}{\longrightarrow} \quad \left| \begin{array}{l} z' = {z'}_0 \; r' = z_0 \; r \\ z'_{d+1} = {z'}_0 \; r'_{d+1} \end{array} \right.$$

Soit un point tel que $r_{d+1} = 0$ ($\Leftrightarrow z_{d+1} = 0$), i.e. $\parallel \vec{x} \parallel = 1$. Alors, d'après la loi de transformation sous un boost :

$$\left| \begin{array}{lcl} z'_0 & = & \text{ch}\, \beta \; z_0 \;+\; \text{sh}\, \beta \; z_{d+1} \\ z'_{d+1} & = & \text{sh}\, \beta \; z_0 \;+\; \text{ch}\, \beta \; z_{d+1} \, , \end{array} \right.$$

on aura donc th $\beta = \frac{z'_{d+1}}{z'_0}$ qui est encore égal à r'_{d+1}.

or $r'_{d+1} = \frac{\lambda^2 x^2 - 1}{\lambda^2 x^2 + 1} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$ puisque $\| \vec{x} \| = 1$

Ainsi

$$\boxed{\text{th } \beta = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\,.} \tag{22}$$

Remarques :

$$\left| \begin{array}{llll} \lambda = 1 & \text{(pas de dilatation)} & \Leftrightarrow & \beta = 0 \\ \lambda \to \infty & \Leftrightarrow \quad \text{th } \beta \to +1 & \Leftrightarrow & \beta \to +\infty \\ \lambda = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{th } \beta \to -1 & \Leftrightarrow & \beta \to -\infty \end{array} \right.$$