M2/CFP/Parcours de Physique Théorique

Invariances en physique et théorie des groupes

Mesure de Haar

1 Métrique, mesure d'intégration et Laplacien sur une variété

1) Soit un sous-groupe G de $GL(n,\mathbb{R})$, et g une matrice définissant une métrique sur ce groupe.

$\| X \|^2 = {}^tXgX$ invariant par reparamétrisation donc $X \to TX = \widetilde{X}$ doit laisser invariant $\| X \|^2$:

$$\| \widetilde{X} \|^2 = {}^t\widetilde{X}\,\widetilde{g}\widetilde{X} = {}^t X\,{}^tT\,\widetilde{g}\,T\,X = \| X \|^2$$

La condition est donc

$${}^tT\,\widetilde{g}\,T = g.$$

2) Mesure invariante :

$${}^tT\widetilde{g}T = g \qquad \text{donc } \det T = \sqrt{\frac{\det g}{\det \widetilde{g}}}$$

$$d^nX = \frac{d^n\widetilde{X}}{(\det T)} \quad \text{donc } \sqrt{\det g}\; d^nX = \frac{\sqrt{\det g}}{\det T} d^n\widetilde{X} = \sqrt{\det \widetilde{g}}\, d^n\widetilde{X}$$

Donc la mesure invariante pour le volume est $\sqrt{\det g}\, d^nX$.

2) a) Par changement de coordonnées, g_{ij} se transforme comme un tenseur **covariant** :

$$x^i \mapsto \widetilde{x}^i \Rightarrow g_{ij} \mapsto \widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial \widetilde{x}^j}\; g_{k\ell}$$

de façon à préserver ds^2. En effet :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{k\ell}dx^k dx^\ell = \widetilde{g}_{ij}\; d\widetilde{x}^i\; d\widetilde{x}^j \\ &= g_{k\ell}\frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i}\;\frac{\partial x^\ell}{\partial \widetilde{x}^j} d\widetilde{x}^i\; d\widetilde{x}^j \end{aligned}$$

qui doit être égal à $\widetilde{g}_{ij} d\widetilde{x}^i \; d\widetilde{x}^j$, ce qui achève la preuve. Noter que

$$\widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \widetilde{x}^j} \, g_{k\ell} \qquad \text{s'écrit encore} \qquad g_{k\ell} = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^\ell} \, \widetilde{g}_{ij} \, .$$

b) En notant $\widetilde{x}^i = T^i{}_k x^k$, soit $T^i{}_k = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k}$,

$$g_{k\ell} = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^\ell} \widetilde{g}_{ij} \qquad \text{s'écrit} \qquad g_{k\ell} = T^i{}_k \, T^j{}_\ell \, \widetilde{g}_{ij} = \; {}^t T^k{}_i \, \widetilde{g}_{ij} \, T^j{}_\ell$$

soit matriciellement $g = \; {}^t T \; \widetilde{g} \; T$, identique à ce qui a été écrit plus haut.

Dans le cas du groupe de Lorentz on impose que la métrique soit invariante, ce qui donne la relation de définition de $\Lambda = T$ bien connue : ${}^t \Lambda \, g \, \Lambda = g$.

c) On définit $g = \det(g_{ij})$ qui n'est pas invariant par changement de coordonnées :

$$g \to \widetilde{g} = \det \widetilde{g}_{ij} = \left(\det \left(\frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \right) \right)^2 g \qquad \text{donc} \qquad \det \left(\frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \right) = \sqrt{\frac{\widetilde{g}}{g}} \, .$$

Or $\displaystyle \prod_i dx^i = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^k} \right) \prod_i d\widetilde{x}^k$ (jacobien de la transformation) ,

d'où $\displaystyle \prod_i dx^i = \sqrt{\frac{\widetilde{g}}{g}} \prod_i d\widetilde{x}^k$, d'où l'invariant $\displaystyle d\mu(x) = \sqrt{g} \prod_i dx^i = \sqrt{\widetilde{g}} \prod_i d\widetilde{x}^i$.

4) Laplacien sur une variété :

On pose $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$. Alors $g^{ij} \mapsto \widetilde{g}^{ij} = \left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^\ell} \right) g^{k\ell}$.

Ceci permet de définir un laplacien Δ

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \, g^{ij} \sqrt{g} \, \frac{\partial}{\partial x^j}$$

tel que $\displaystyle \int d\mu(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \, g^{ij} \, \frac{\partial h(x)}{\partial x^j} = \int d\mu(x) f(x) (-\Delta) h(x)$ (terme de bord = 0) soit invariant par changement de coordonnées, pour tout couple de fonctions (de carré intégrable) sur la variété. En effet

$$\int d\mu(x) \frac{\partial f}{\partial \widetilde{x}^i} \, \widetilde{g}^{ij} \, \frac{\partial h}{\partial \widetilde{x}^j} \quad = \quad \int d\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^{\ell'}} \, g^{k'\ell'} \, \frac{\partial x^\ell}{\partial \widetilde{x}^j} \frac{\partial h}{\partial x^\ell}$$

Comme $\displaystyle \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^{k'}} = \delta^k_{k'}$ et $\displaystyle \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial \widetilde{x}^j} = \delta^\ell_{\ell'}$,

on a donc $\displaystyle \int d\mu(x) \frac{\partial f}{\partial \widetilde{x}^i} \, \widetilde{g}^{ij} \, \frac{\partial h}{\partial \widetilde{x}^j} = \int d\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^k} \, g^{k\ell} \, \frac{\partial h}{\partial x^\ell}$

ce qui prouve que $\displaystyle \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \, g^{k\ell} \, \frac{\partial h(x)}{\partial x^\ell}$ est invariant. On écrit alors

$$
\begin{aligned}
\int d\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\; g^{ij}\; \frac{\partial h}{\partial x^j} &= \int \sqrt{g}\prod_i dx^i\, \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\; g^{ij}\; \frac{\partial h(x)}{\partial x^j} \\
&= -\int \prod_i dx^i\; f(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\; \sqrt{g}\; g^{ij}\; \frac{\partial h(x)}{\partial x^j}
\end{aligned}
$$

où l'on a intégré par partie, en tenant compte du fait que les termes de bord sont nuls puisque f et h sont de carré intégrable. On peut alors faire apparaître la mesure $d\mu(x)$

$$
\int d\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\; g^{ij}\; \frac{\partial h}{\partial x^j} = -\int \underbrace{\sqrt{g}\;\prod_i dx^i}_{d\mu(x)}\; f(x)\; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{g}}\;\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}\; g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}}_{\Delta}\; h(x)
$$

ce qui achève la preuve.

5) Laplacien dans l'espace $\mathbb{R}^n$:

$$
\rho^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{donc} \quad 2\rho\frac{\partial \rho}{\partial x^i} = 2x_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho}\,.
$$

La partie radiale s'écrit donc

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\right) \\
&= \frac{n}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho} + x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\right) = \frac{n}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho} + x_i\;\frac{x_i}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\right) \\
&= \frac{n}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho} + \rho\;\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho}\right) = \frac{n}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{n-1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}
\end{aligned}
$$

D'où l'on déduit que

$$
\boxed{\Delta_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\;\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\Delta_{Sph\grave{e}re\ S^{n-1}}}
$$

6) a) De façon générique, pour $n > 1$,

$$
\vec{n}_n = \cos\phi_n\,\vec{u}_{n+1} + \sin\phi_n\,\vec{n}_{n-1}\,,
$$

d'où l'on tire que

$$
d\vec{n}_n = d\phi_n(\cos\phi_n\,\vec{n}_{n-1} - \sin\phi_n\,\vec{u}_{n+1}) + \sin\phi_n\,d\vec{n}_{n-1}
$$

et donc

$$
(d\vec{n}_n)^2 = (d\phi_n)^2(\cos^2\phi_n + \sin^2\phi_n) + \sin^2\phi_n\,(d\vec{n}_{n-1})^2 = (d\phi_n)^2 + \sin^2\phi_n\,(d\vec{n}_{n-1})^2\,.
$$

b) En notant $X = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$, on en déduit la forme de la métrique sur S^n et du déterminant correspondant

$$
\begin{array}{ll}
g_1 = 1 & \det g_1 = 1 \\
g_2 = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi_2 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det g_2 = \sin^2 \phi_2 \\
\cdots & \\
g_n = \begin{pmatrix} g_{n-1} \sin^2 \phi_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det g_n = \det g_{n-1} (\sin^2 \phi_n)^{n-1}
\end{array}
$$

On notera que g_{n-1} est une matrice $(n-1) \times (n-1)$, d'où la présence de l'exposant $n-1$ dans la relation ci-dessus. On en déduit finalement que

$$\sqrt{\det g_n} = \sin \phi_2 \, \sin^2 \phi_3 \cdots \sin^{n-1} \phi_n \, ,$$

c) On en tire l'expression de l'élément de surface sur S^n

$$\boxed{dS_n = \sin \phi_2 \, \sin^2 \phi_3 \cdots \sin^{n-1} \phi_n \, d\phi_1 \, d\phi_2 \cdots d\phi_n \, .}$$

d) Partant de l'intégrale gaussienne bien connue, nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^d &= \pi^{d/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_d \; e^{-(x_1^2 + \cdots + x_d^2)} = \int d^d \vec{x} \, e^{-\vec{x}^2} \\
&= S_d \int_0^\infty r^{d-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} S_d \int_0^\infty \rho^{\frac{d}{2}-1} e^{-\rho} d\rho = \frac{1}{2} S_d \, \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)
\end{aligned}
$$

où l'on a posé $\rho = r^2$. On en déduit donc

$$\boxed{S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \, .} \tag{1}$$

e) quelques valeurs classiques de S_d :

d	$\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$	S_d
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	2π
3	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	4π
4	1	$2\pi^2$

La surface de la sphère S^n vaut

$$S_{n+1} = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{\pi} \sin\phi_2 \, d\phi_2 \int_0^{\pi} \sin^2\phi_3 \, d\phi_3 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-1}\phi_n \, d\phi_n \tag{2}$$

En utilisant la relation

$$\int_0^{\pi} \sin^{\mu-1} x \, dx = 2^{\mu-1} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$$

où

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

on déduit de (2) la relation (1) :

cas $n = 2P+1$:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = S_{2P+2} &= 2\pi\, 2^{(2P+1)P} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\cdot 1+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2)\Gamma(3)} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2\cdot 2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\cdot 2+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(4)\Gamma(5)} \cdots \\
&\times \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2k)\Gamma(2k+1)} \cdots \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2P}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2P+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2P)\Gamma(2P+1)} \\
&= 2\pi\, 2^{(2P+1)P} \prod_{k=1}^{P} \frac{\pi}{2^{4k-1}k} = \frac{2\pi^{P+1}}{\Gamma(P+1)}
\end{aligned}$$

qui est bien identique au résultat tiré de (1). On a utilisé la relation

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)}{2^{2n-1}\Gamma(n)} \tag{3}$$

pour passer de l'avant dernière ligne à la dernière.

cas $n = 2P$:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = S_{2P+1} &= 2\pi\, 2^{(2P+1)P} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\cdot 1+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2)\Gamma(3)} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2\cdot 2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\cdot 2+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(4)\Gamma(5)} \cdots \\
&\times \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2k)\Gamma(2k+1)} \cdots \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2(P-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2(P-1)+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2(P-1))\Gamma(2(P-1)+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{2P}{2}\right)^2 2^{2P-1}}{\Gamma(2P)} \\
&= \frac{2\pi^P \Gamma(P) 2^{2P-1}}{\Gamma(2P)}
\end{aligned}$$

à comparer à la relation (1) qui donne, en utilisant à nouveau la relation (3)

$$S_{2P+1} = \frac{2\pi^{\frac{2P+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2P+1}{2}\right)} = \frac{2\pi^P \Gamma(P) 2^{2P-1}}{\Gamma(2P)} \,,$$

ce qui achève la preuve.

7) a) D'après la question 6),

$$d\mu_{S^3} = \sin^2\phi_3 \, \sin\phi_2 \, d\phi_1 \, d\phi_2 \, d\phi_3 \, .$$

Dans les notations usuelles, $\phi_1 = \phi$, $\phi_2 = \theta$ et $\phi_3 = \frac{\psi}{2}$, soit

$$d\mu(U) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\psi}{2} \sin\theta \, d\psi \, d\theta \, d\phi \, .$$

b) La normalisation est automatique puisque l'on est parti de la mesure sur S^3.

8) L'équation

$$U(\alpha, z)\, U(\beta, y)\, U(\gamma, z) = U(\alpha', z)\, U(\beta', y)\, U(\gamma', z)$$

s'écrit encore

$$U(\beta, y)\, U(\gamma - \gamma', z) = U(\alpha' - \alpha, z)\, U(\beta', y)$$

soit

$$\begin{aligned} &\left(\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} - i\sigma_3 \sin\frac{\gamma-\gamma'}{2}\right) \\ &= \left(\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} - i\sigma_3 \sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta'}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\beta'}{2}\right) \, . \end{aligned}$$

qui mène à

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} &=& \cos\frac{\beta'}{2}\,\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (4.1) \\ \sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} &=& \sin\frac{\beta'}{2}\,\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (4.2) \\ \cos\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma-\gamma'}{2} &=& \cos\frac{\beta'}{2}\,\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (4.3) \\ \sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma-\gamma'}{2} &=& -\sin\frac{\beta'}{2}\,\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (4.4) \end{array} \right. \tag{4}$$

En combinant (4.1) et (4.2) on obtient la condition nécessaire

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\beta'}{2}\,\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\beta'}{2}\,\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} \\ \Leftrightarrow &\left\{ \begin{array}{lll} & \cos\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\beta'}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\beta'}{2} & (\mathrm{I}) \\ \text{ou} & \cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} = 0 & (\mathrm{II}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Examinons chacun des 2 cas successivement :

(I) : $\cos\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\beta'}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\beta'}{2}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} & \tan\frac{\beta}{2} = \tan\frac{\beta'}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} \equiv \frac{\beta'}{2}[\pi] \Leftrightarrow \beta \equiv \beta'[2\pi] \\ \\ \text{ou} & \left\{ \begin{array}{l} (I) \text{ et } \{\cos\frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \beta \equiv \pi[2\pi]\} \\ \text{alors } \sin\frac{\beta}{2} \neq 0 \text{ et } (I) \Rightarrow \{\cos\frac{\beta'}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta' \equiv \pi[2\pi]\} \text{ d'où } \beta \equiv \beta'[2\pi] \end{array} \right. \\ \\ \text{ou} & \left\{ \begin{array}{l} (I) \text{ et } \{\sin\frac{\beta'}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta'}{2} \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \beta' \equiv 0[2\pi]\} \\ \text{alors } \cos\frac{\beta'}{2} \neq 0 \text{ et } (I) \Rightarrow \{\sin\frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta \equiv 0[2\pi]\} \text{ d'où } \beta \equiv \beta'[2\pi] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et donc (I) $\Leftrightarrow \beta \equiv \beta'[2\pi]$. Dans ce cas, examinons à présent les équations (4.1)-(4.4) : on pose $\Gamma = \frac{\gamma-\gamma'}{2}$ et $A = \frac{\alpha-\alpha'}{2}$. Deux cas se présentent :

A) $\beta \equiv \beta'[4\pi]$: Alors

$$\begin{array}{ccc} ((4.1) \text{ et } (4.2)) & \Leftrightarrow & \cos\Gamma = \cos A \\ (4.3) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = \sin A \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = -\sin A \end{array}$$

Les deux dernières équations mènent à $\sin\Gamma = \sin A = 0$ soit $\Gamma \equiv 0\,[\pi]$ et $A \equiv 0\,[\pi]$. De $\cos\Gamma = \cos A$ on tire alors que

$$\left(\left\{\begin{array}{ccc} A & \equiv & 0\,[2\pi] \\ \Gamma & \equiv & 0\,[2\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\equiv\alpha'\,[4\pi] \\ \gamma\equiv\gamma'\,[4\pi] \end{array}\right\}\right) \text{ ou } \left(\left\{\begin{array}{ccc} A & \equiv & \pi\,[2\pi] \\ \Gamma & \equiv & \pi\,[2\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\equiv\alpha' + 2\pi\,[4\pi] \\ \gamma\equiv\gamma' + 2\pi\,[4\pi] \end{array}\right\}\right)$$

B) $\beta \equiv \beta' + 2\pi\,[4\pi]$: Alors

$$\begin{array}{ccc} ((4.1) \text{ et } (4.2)) & \Leftrightarrow & \cos\Gamma = -\cos A \\ (4.3) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = -\sin A \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = \sin A \end{array}$$

Les deux dernières équations mènent à $\Gamma \equiv 0\,[\pi]$ et $A \equiv 0\,[\pi]$. De $\cos\Gamma = -\cos A$ on tire alors que

$$\left(\left\{\begin{array}{ccc} A & \equiv & 0\,[2\pi] \\ \Gamma & \equiv & \pi\,[2\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\equiv\alpha'\,[4\pi] \\ \gamma\equiv\gamma' + 2\pi\,[4\pi] \end{array}\right\}\right) \text{ ou } \left(\left\{\begin{array}{ccc} A & \equiv & \pi\,[2\pi] \\ \Gamma & \equiv & 0\,[2\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\equiv\alpha' + 2\pi\,[4\pi] \\ \gamma\equiv\gamma'\,[4\pi] \end{array}\right\}\right)$$

(II) : $\gamma - \gamma' \equiv \pi\,[2\pi]$ alors (4.1) et (4.2) conduisent à $\alpha - \alpha' \equiv \pi\,[2\pi]$. Deux cas se présentent :

$A)$ $\alpha - \alpha' \equiv \pi\,[4\pi]$

$a)$ $\gamma' - \gamma \equiv \pi\,[4\pi]$ alors

$$\left.\begin{array}{lcrcl} (4.3) & \Leftrightarrow & -\cos\frac{\beta}{2} & = & \cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & -\sin\frac{\beta}{2} & = & \sin\frac{\beta'}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow e^{i\frac{\beta}{2}} = -e^{-i\frac{\beta'}{2}} = e^{-i\left(\frac{\beta'}{2}+\pi\right)}$$

$$\text{donc } \frac{\beta}{2} \equiv -\frac{\beta'}{2} - \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow \beta \equiv -\beta' - 2\pi\,[4\pi]$$

$b)$ $\gamma' - \gamma \equiv -\pi\,[4\pi]$ alors

$$\left.\begin{array}{lcrcl} (4.3) & \Leftrightarrow & \cos\frac{\beta}{2} & = & \cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\frac{\beta}{2} & = & -\sin\frac{\beta'}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow e^{i\frac{\beta}{2}} = e^{-i\frac{\beta'}{2}} \text{ donc } \beta \equiv -\beta'\,[4\pi]$$

$B)$ $\alpha - \alpha' \equiv -\pi\,[4\pi]$

$c)$ $\gamma' - \gamma \equiv -\pi\,[4\pi]$ alors

$$\left.\begin{array}{lcrcl} (4.3) & \Leftrightarrow & \cos\frac{\beta}{2} & = & -\cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\frac{\beta}{2} & = & \sin\frac{\beta'}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \beta \equiv -\beta' - 2\pi\,[4\pi]$$

$d)$ $\gamma' - \gamma \equiv \pi\,[4\pi]$ alors

$$\left.\begin{array}{lcrcl} (4.3) & \Leftrightarrow & -\cos\frac{\beta}{2} & = & -\cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & -\sin\frac{\beta}{2} & = & \sin\frac{\beta'}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \beta \equiv -\beta'\,[4\pi]$$

Le cas (I) montre que $U(\alpha,\beta,\gamma)$ est périodique de période 4π en α, β et γ. En utilisant (I), le domaine fondamental $(\alpha,\beta,\gamma) \in [0,4\pi]\times[0,4\pi]\times[0,4\pi]$ peut être réduit à $(\alpha,\beta,\gamma) \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]\times[0,4\pi]$:

$$\text{si } \left\{\begin{array}{c} 2\pi \le \alpha \le 4\pi \\ 0 \le \beta \le 2\pi \\ 2\pi \le \gamma \le 4\pi \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha \to \alpha - 2\pi \\ \gamma \to \gamma - 2\pi \end{array}\right. \quad \text{ramène au domaine} \quad \left\{\begin{array}{c} 0 \le \alpha \le 2\pi \\ 0 \le \beta \le 2\pi \\ 0 \le \gamma \le 2\pi \end{array}\right.$$

$$\text{si } \left\{\begin{array}{c} 2\pi \le \alpha \le 4\pi \\ 2\pi \le \beta \le 4\pi \\ 0 \le \gamma \le 4\pi \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha \to \alpha - 2\pi \\ \beta \to \beta - 2\pi \end{array}\right. \quad \text{ramène au domaine} \quad \left\{\begin{array}{c} 0 \le \alpha \le 2\pi \\ 0 \le \beta \le 2\pi \\ 0 \le \gamma \le 4\pi \end{array}\right.$$

$$\text{si} \begin{cases} 2\pi \leq \alpha \leq 4\pi \\ 0 \leq \beta \leq 2\pi \\ 0 \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha \to \alpha - 2\pi \\ \gamma \to \gamma + 2\pi \end{cases} \quad \text{ramène au domaine} \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 0 \leq \beta \leq 2\pi \\ 2\pi \leq \gamma \leq 4\pi \end{cases}$$

$$\text{si} \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 2\pi \leq \beta \leq 4\pi \\ 0 \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} \beta \to \beta - 2\pi \\ \gamma \to \gamma + 2\pi \end{cases} \quad \text{ramène au domaine} \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 0 \leq \beta \leq 2\pi \\ 2\pi \leq \gamma \leq 4\pi \end{cases}$$

$$\text{si} \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 2\pi \leq \beta \leq 4\pi \\ 2\pi \leq \gamma \leq 4\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} \beta \to \beta - 2\pi \\ \gamma \to \gamma - 2\pi \end{cases} \quad \text{ramène au domaine} \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ 0 \leq \beta \leq 2\pi \\ 0 \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases}$$

Le domaine fondamental $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 4\pi]$ peut être réduit finalement à $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 4\pi]$: par périodicité on peut considérer de façon équivalente le domaine $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi] \times [0, 4\pi]$. On se restreint ensuite à $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 4\pi]$ et l'on prouve que les valeurs de $U(\alpha, \beta, \gamma)$ sur le domaine $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [-\pi, 0] \times [0, 4\pi]$ s'en déduisent.

Partons du domaine $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$:

$$\text{si } 0 \leq \alpha \leq \pi\,, \quad \begin{cases} \alpha \to \alpha + \pi \\ \beta \to -\beta \\ \gamma \to \gamma - \pi \end{cases}$$

permet de construire U à condition d'étendre le domaine en γ à $-\pi \leq \gamma \leq 2\pi$

$$\text{si } \pi \leq \alpha \leq 2\pi\,, \quad \begin{cases} \alpha \to \alpha - \pi \\ \beta \to -\beta \\ \gamma \to \gamma + \pi \end{cases}$$

permet de finalement de construire U à condition d'étendre le domaine en γ à $-\pi \leq \gamma \leq 3\pi$. Par périodicité, ce domaine se ramène à $0 \leq \gamma \leq 4\pi$. La procédure cidessus construit explicitement une surjection de $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 4\pi]$ sur $SU(2)$, qui est une bijection puisque sur ce domaine l'équation $U(\alpha, \beta, \gamma) = U(\alpha', \beta', \gamma')$ n'a pas d'autre solution que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Ceci achève la preuve que $SU(2)$ est en bijection avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 4\pi]$.

9) La discussion est similaire à celle de la question précédente : l'équation

$$U(\alpha,z)\,U(\beta,y)\,U(\gamma,z) = -U(\alpha',z)\,U(\beta',y)\,U(\gamma',z)$$

s'écrit encore

$$U(\beta,y)\,U(\gamma-\gamma',z) = -U(\alpha'_\alpha,z)\,U(\beta',y)$$

soit

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_2\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\gamma-\gamma'}{2}\right)\\
&= -\left(\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta'}{2} - i\sigma_2\sin\frac{\beta'}{2}\right).
\end{aligned}$$

qui mène à

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} & = & -\cos\frac{\beta'}{2}\,\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (5.1)\\
-\sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} & = & \sin\frac{\beta'}{2}\,\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (5.2)\\
-\cos\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma-\gamma'}{2} & = & \cos\frac{\beta'}{2}\,\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (5.3)\\
-\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma-\gamma'}{2} & = & -\sin\frac{\beta'}{2}\,\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} & (5.4)
\end{array}\right. \qquad (5)$$

En combinant (5.1) et (5.2) on obtient la condition nécessaire

$$\begin{aligned}
&\cos\tfrac{\beta}{2}\,\sin\tfrac{\beta'}{2}\,\cos\tfrac{\gamma-\gamma'}{2} = \sin\tfrac{\beta}{2}\,\cos\tfrac{\beta'}{2}\,\cos\tfrac{\gamma-\gamma'}{2}\\
\Leftrightarrow &\left\{\begin{array}{lll}
 & \cos\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\beta'}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\beta'}{2} & (\mathrm{I})\\
\text{ou} & \cos\frac{\gamma-\gamma'}{2} = 0 & (\mathrm{II})
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Examinons chacun des 2 cas successivement :

(I) : La même discussion que celle de la question 8) donne (I) $\Leftrightarrow \beta\equiv\beta'[2\pi]$.

On pose $\Gamma = \frac{\gamma-\gamma'}{2}$ et $A = \frac{\alpha-\alpha'}{2}$. Les équations (4.1)-(4.4) conduisent alors à deux cas :

A) $\beta\equiv\beta'[4\pi]$: Alors

$$\begin{array}{ccc}
((4.1)\text{ et }(4.2)) & \Leftrightarrow & \cos\Gamma = -\cos A\\
(4.3) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = -\sin A\\
(4.4) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = \sin A
\end{array}$$

On obtient le même système qu'en 8)(I) B), et donc

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\alpha & \equiv & \alpha'+2\pi\,[4\pi]\\
\gamma & \equiv & \gamma'\,[2\pi]
\end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl}
\alpha & \equiv & \alpha'\,[4\pi]\\
\gamma & \equiv & \gamma'+2\pi\,[4\pi]
\end{array}\right\}$$

B) $\beta \equiv \beta' + 2\pi\,[4\pi]$: Alors

$$\begin{array}{lcl} ((4.1) \text{ et } (4.2)) & \Leftrightarrow & \cos\Gamma = \cos A \\ (4.3) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = \sin A \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\Gamma = -\sin A \end{array}$$

On obtient le même système qu'en 8)(I) A), et donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & \equiv & \alpha'\,[4\pi] \\ \gamma & \equiv & \gamma'\,[2\pi] \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & \equiv & \alpha' + 2\pi\,[4\pi] \\ \gamma & \equiv & \gamma' + 2\pi\,[4\pi] \end{array} \right\}$$

(II) : $\gamma - \gamma' \equiv \pi\,[2\pi]$ alors (5.1) et (5.2) conduisent à $\alpha - \alpha' \equiv \pi\,[2\pi]$. Deux cas se présentent :

A) $\alpha - \alpha' \equiv \pi\,[4\pi]$

a) $\gamma' - \gamma \equiv \pi\,[4\pi]$ alors

$$\left. \begin{array}{lclcl} (4.3) & \Leftrightarrow & \cos\frac{\beta}{2} & = & \cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\frac{\beta}{2} & = & -\sin\frac{\beta'}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \beta \equiv -\beta'\,[4\pi]$$

b) $\gamma' - \gamma \equiv -\pi\,[4\pi]$ alors

$$\left. \begin{array}{lclcl} (4.3) & \Leftrightarrow & -\cos\frac{\beta}{2} & = & \cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\frac{\beta}{2} & = & \sin\frac{\beta'}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \beta \equiv -\beta' - 2\pi\,[4\pi]$$

B) $\alpha - \alpha' \equiv -\pi\,[4\pi]$

c) $\gamma' - \gamma \equiv -\pi\,[4\pi]$ alors

$$\left. \begin{array}{lclcl} (4.3) & \Leftrightarrow & \cos\frac{\beta}{2} & = & \cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & -\sin\frac{\beta}{2} & = & \sin\frac{\beta'}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \beta \equiv -\beta'\,[4\pi]$$

d) $\gamma' - \gamma \equiv \pi\,[4\pi]$ alors

$$\left. \begin{array}{lclcl} (4.3) & \Leftrightarrow & -\cos\frac{\beta}{2} & = & -\cos\frac{\beta'}{2} \\ (4.4) & \Leftrightarrow & \sin\frac{\beta}{2} & = & \sin\frac{\beta'}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \beta \equiv -\beta' - 2\pi\,[4\pi]$$

Ce qui achève la discussion générale. Sur le domaine $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 4\pi]$, la seule solution qui subsiste est donc la solution (I) A) (2) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \alpha' \\ \beta' & = & \beta \\ \gamma' & = & \gamma + 2\pi \ (0 \le \gamma \le 2\pi) \text{ ou } \gamma' = \gamma - 2\pi \ (2\pi \le \gamma \le 4\pi) \end{array} \right. .$$

Il y a donc bijection entre $(\alpha,\beta,\gamma) \in [0,2\pi]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ et $SO(3)$, puisque U et $-U$ ont même image $R(U)$ dans le morphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$.

c) En utilisant la forme explicite des matrices de Pauli, on déduit immédiatement que

$$
\begin{aligned}
&U_{\vec{n}(\psi)} = \cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}\vec{n}\cdot\sigma \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta & -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta\,\cos\phi - \sin\frac{\psi}{2}\sin\theta\,\sin\phi \\ -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta\,\cos\phi + \sin\frac{\psi}{2}\sin\theta\,\sin\phi & \cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta & -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ -i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta\, e^{i\phi} & \cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6}
$$

En identifiant cette expression à l'écriture de U en termes des angles d'Euler

$$
U(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & -\sin\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} & \cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{pmatrix} \tag{7}
$$

on en déduit les relations

$$
\sin\phi\,\sin\frac{\psi}{2}\,\sin\theta = \cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2} \tag{8}
$$

$$
\cos\phi\,\sin\frac{\psi}{2}\,\sin\theta = \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2} \tag{9}
$$

$$
\cos\frac{\psi}{2} = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\,\cos\frac{\beta}{2} \tag{10}
$$

$$
\sin\frac{\psi}{2}\,\cos\theta = \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\,\cos\frac{\beta}{2} \tag{11}
$$

d) On tire de (8) et de (9) que $\phi \equiv \frac{\alpha-\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, et l'on choisit, sans perte de généralité, $\phi = \frac{\alpha-\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}$. On en déduit alors que (8,9) sont équivalentes à

$$
\sin\frac{\psi}{2}\,\sin\theta = \sin\frac{\beta}{2}\,. \tag{12}
$$

En formant le rapport de (10) et (11) on tire

$$
\tan\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\theta\,\tan\frac{\psi}{2}\,. \tag{13}
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{\alpha+\gamma}{2} \\
d &= \frac{\alpha-\gamma}{2}
\end{aligned}
$$

et donc $\phi = d + \frac{\pi}{2}$. On déduit alors des relations précédentes, par dérivation par rapport aux variables (ϕ, θ, ψ), la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(s,d,\beta)}{\partial(\phi,\theta,\psi)} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \tan\frac{\psi}{2}\cos^2 s & \frac{1}{2}\frac{\cos^2 s}{\cos^2\frac{\psi}{2}}\cos\theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta}{\cos\frac{\beta}{2}} & \frac{\cos\frac{\psi}{2}\sin\theta}{\cos\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \tag{14}$$

De la matrice jacobienne (14) on déduit alors la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(\alpha,\gamma,\beta)}{\partial(\phi,\theta,\psi)} = \frac{\partial(\alpha,\gamma,\beta)}{\partial(s,d,\beta)}\frac{\partial(s,d,\beta)}{\partial(\phi,\theta,\psi)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \tag{15}$$

e) Le déterminant de cette matrice jacobienne est

$$J = ad - bc = -\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cos^2 s \frac{\sin^2\theta\,\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\theta}{\cos^2\frac{\psi}{2}} = -\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}\cos s \tag{16}$$

où l'on a utilisé le fait que

$$\sin^2\theta\,\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\theta = \sin^2\theta - \sin^2\theta\,\sin^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\theta = 1 - \sin^2\frac{\beta}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2}.$$

puis l'équation (10). L'inverse de la matrice jacobienne (15) s'écrit

$$\frac{\partial(\phi,\theta,\psi)}{\partial(\alpha,\gamma,\beta)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{d}{2J} & \frac{d}{2J} & -\frac{b}{J} \\ -\frac{c}{2J} & -\frac{c}{2J} & \frac{a}{J} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{a}{J} &= \sin\theta\,\cos s \equiv S \\ -\frac{b}{J} &= \frac{\cos^2\theta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}\,\sin s} \equiv \frac{N}{2} \\ \frac{d}{2J} &= -\frac{\cos s\,\sin\theta\,\cos\theta}{2\sin s} \equiv -\frac{M}{2} \\ -\frac{c}{2J} &= \cos s \equiv R \end{aligned} \tag{18}$$

Notons g la métrique exprimée dans les variables (ϕ, θ, ψ) :

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\,\sin^2\frac{\psi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\frac{\psi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{19}$$

et $\tilde{g}$ la métrique exprimée dans les variables (α, γ, β). De la relation

$$\tilde{g} = \left(\frac{\partial(\phi, \theta, \psi)}{\partial(\alpha, \gamma, \beta)}\right)^T g \left(\frac{\partial(\phi, \theta, \psi)}{\partial(\alpha, \gamma, \beta)}\right) \tag{20}$$

on tire donc

$$\tilde{g} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} M^2 g_2 + R^2 + g_1 & M^2 g_2 + R^2 - g_1 & -MNg2 + RS \\ M^2 g_2 + R^2 - g_1 & M^2 g_2 + R^2 + g_1 & -MNg2 + RS \\ -MNg2 + RS & -MNg2 + RS & N^2 g_2 S^2 \end{pmatrix} . \tag{21}$$

Un calcul élémentaire montre alors que $N^2 g_2 S^2 = 1$, $-MNg2 + RS = 0$, $M^2 g_2 + R^2 + g_1 = 1$ et enfin que $M^2 g_2 + R^2 - g_1 = \cos\beta$. On en déduit finalement que

$$\tilde{g} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \cos\beta & 0 \\ \cos\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{22}$$

f) De (22) on tire $\sqrt{\det \tilde{g}} = \sin\beta/8$ ($\beta \in [0, \pi]$ donc $\sin\beta \geq 0$) d'où

$$d\mu(U) = \frac{1}{8} \sin\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \, . \tag{23}$$

9) a) $\mathrm{tr}\, dU\, dU^\dagger$ est une forme quadratique définie positive :

$$\begin{aligned} 2 \ \mathrm{tr} \ dU dU^+ &= 2dU_{ij} \ dU^+_{ji} = 2dU_{ij} \ dU^*_{ij} \geq 0 \\ \text{et} \quad \mathrm{tr} \ dU dU^+ &= 0 \ \Leftrightarrow \ dU_{ij} = 0 \, , \ \forall \, i, j \, . \end{aligned}$$

Invariance de la mesure : soit V un élément quelconque de $SU(2)$. Alors

$$\mathrm{tr}\, d(V\, U)\, d(V\, U)^\dagger = \mathrm{tr} V \, dU \, dU^\dagger \, V^\dagger = \mathrm{tr}\, dU\, dU^\dagger$$

par invariance cyclique de la trace, ce qui prouve l'invariance à droite de cette distance. De même pour l'invariance à gauche. L'invariance par inversion est immédiate en écrivant que

$$\mathrm{tr}\, dU^{-1}\, d(U^{-1})^\dagger = \mathrm{tr} dU^\dagger\, dU = \mathrm{tr}\, dU\, dU^\dagger \, .$$

b) De $U = \cos\frac{\psi}{2} - i \sin\frac{\psi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ on tire $dU = -\left(\sin\frac{\psi}{2} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cos\frac{\psi}{2}\right) \frac{d\psi}{2} - i \sin\frac{\psi}{2} \vec{\sigma} \cdot d\vec{n}$ soit

$$dU dU^+ = \left[-\left(\sin\frac{\psi}{2} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cos\frac{\psi}{2}\right) \frac{d\psi}{2} - i \sin\frac{\psi}{2} \vec{\sigma} \cdot d\vec{n} \right]$$

$$
\begin{aligned}
& \times \left[-\left(\sin\frac{\psi}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\cos\frac{\psi}{2} \right)\frac{d\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\vec{\sigma}\cdot d\vec{n} \right] \\
= \; & \sin^2\frac{\psi}{2}\,\frac{(d\psi)^2}{4} + \left[(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\,(\vec{\sigma}\cdot d\vec{n}) + (\vec{\sigma}\cdot d\vec{n})\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) \right]\sin\frac{\psi}{2}\;\cos\frac{\psi}{2}\;\frac{d\psi}{2} \\
& + \left(\sin\frac{\psi}{2} \right)^2 (\vec{\sigma}\cdot d\vec{n})^2 + (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^2\cos^2\frac{\psi}{2}\;\frac{(d\psi)^2}{4} \\
= \; & \sin^2\frac{\psi}{2}\,\frac{(d\psi)^2}{4} + \underbrace{(\vec{n}\cdot d\vec{n} + d\vec{n}\cdot\vec{n})}_{d\vec{n}^2 = 0}\sin\;\frac{\psi}{2}\;\cos\frac{\psi}{2}\;\frac{d\psi}{2} + \left(\sin\;\frac{\psi}{2} \right)^2 (d\vec{n})^2 \\
& + \vec{n}^2\cos^2\frac{\psi}{2}\;\frac{(d\psi)^2}{4}
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé la relation

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

Finalement,

$$ds^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, dU\, dU^+ = \left(d\frac{\psi}{2} \right)^2 + \sin^2\frac{\psi}{2}(d\vec{n})^2$$

c) La métrique correspondantes dans les variables (ψ, ϕ, θ) sur $[0, 2\pi] \times S^2$ s'écrit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\frac{\psi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\frac{\psi}{2} \end{pmatrix}$$

de déterminant $g = \left[\frac{1}{2}\sin^2\frac{\psi}{2} \right]^2$, auquel correspond l'élément de volume

$$d\mu(U) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}d\psi\, d^2\vec{n}\,.$$

Comme sur la sphère S^2 on peut écrire $d^2\vec{n} = \sin\theta\; d\phi\; d\theta$, on en déduit que

$$d\mu(U) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\;\sin\theta\, d\psi\, d\theta\, d\phi\,, \tag{24}$$

en accord avec le résultat de la question 7)b), obtenu à l'aide de la mesure sur S^3.

d) En utilisant la paramétrisation des angles d'Euler (7) on peut écrire

$$dU = \begin{pmatrix} \left(-\frac{i}{2}d(\alpha+\gamma)\cos\frac{\beta}{2} - \frac{d\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} \right) e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & \left(\frac{i}{2}d(\alpha-\gamma)\sin\frac{\beta}{2} - \frac{d\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \right) e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \\ \left(\frac{i}{2}d(\alpha-\gamma)\sin\frac{\beta}{2} + \frac{d\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \right) e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} & \left(\frac{i}{2}d(\alpha+\gamma)\cos\frac{\beta}{2} - \frac{d\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} \right) e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{tr}\; dU\, dU^+ = \sum_{i,j} |dU_{ij}|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left[(d(\alpha+\gamma))^2\cos^2\frac{\beta}{2}+(d\beta)^2\sin^2\frac{\beta}{2}\right]+\frac{1}{4}\left[(d(\alpha-\gamma))^2\sin^2\frac{\beta}{2}+(d\beta)^2\cos^2\frac{\beta}{2}\right]\\
&+ \frac{1}{4}\left[(d(\alpha-\gamma))^2\sin^2\frac{\beta}{2}+(d\beta)^2\cos^2\frac{\beta}{2}\right]+\frac{1}{4}\left[(d(\alpha+\gamma))^2\cos^2\frac{\beta}{2}+(d\beta)^2\sin^2\frac{\beta}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\,(d(\alpha+\gamma))^2\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\,(d(\alpha-\gamma))^2\sin^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}(d\beta)^2\\
&= \frac{1}{2}(d\alpha)^2+\frac{1}{2}(d\beta)^2+\frac{1}{2}(d\gamma)^2+d\alpha d\gamma\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
ds^2=\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ dU\,dU^+=\frac{1}{4}\left[(d\alpha)^2+(d\beta)^2+(d\gamma)^2+2\cos\beta\ d\alpha\,d\gamma\right]
$$

et la métrique correspondante dans les variables (α,β,γ) s'écrit

$$
\begin{array}{cc}
\tilde{g}_{ij}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array}
\end{array}
$$

en accord avec (22), et donc

$$
d\mu(U)=\sqrt{g}\ d\alpha\ d\beta\ d\gamma=\frac{1}{8}\sin\beta\ d\alpha\ d\beta\ d\gamma\,.
$$

Notons que l'invariance de la mesure $d\mu(U)$ par inversion se vérifie explicitement sur cette expression. Examinons en effet la transformation $U\to U^{-1}=U^{\dagger}$:

$$
\begin{aligned}
U &= U(\alpha,z)\ U(\beta,y)\ U(\gamma,z)\\
U^+ &= U^{-1}=U^{-1}(\gamma,z)\ U^{-1}(\beta,y)\ U^{-1}(\alpha,z)
\end{aligned}
$$

et $U\to U^+$ s'obtient en faisant $(\alpha\leftrightarrow-\gamma\,,\beta\leftrightarrow-\beta)$, transformation sous laquelle $\sin\beta\ d\alpha\ d\beta\ d\gamma$ est invariante.

10) a) Soit $U\in U(n)$, que l'on diagonalise sous la forme

$$
U=V\,\Lambda\,V^{\dagger}\,, \tag{25}
$$

où $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. Alors de façon immédiate

$$
U^{\dagger}=V\,\Lambda^{\dagger}\,V^{\dagger}\,,\qquad \text{donc}\qquad I=U\,U^{\dagger}=V\,\Lambda\,\Lambda^{\dagger}\,V^{\dagger}\qquad \text{et}\qquad I=U^{\dagger}\,U=V\,\Lambda^{\dagger}\,\Lambda\,V^{\dagger}
$$

d'où l'on déduit que

$$
\Lambda\,\Lambda^{\dagger}=\Lambda^{\dagger}\,\Lambda=I\,,
$$

ce qui montre que les valeurs propres λ_j sont des phases $\lambda_j=e^{i\alpha_j}$.

b) Soit $V \in U(n)$. Supposons que $[V,\, \Lambda] = 0$. On tire par un calcul immédiat que

$$V\,\Lambda = \begin{pmatrix} V_{11}\,\lambda_1 & V_{12}\,\lambda_2 & \cdots & V_{1n}\,\lambda_n \\ V_{21}\,\lambda_1 & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ V_{n1}\,\lambda_1 & V_{n2}\,\lambda_2 & \cdots & V_{nn}\,\lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda\,V = \begin{pmatrix} V_{11}\,\lambda_1 & V_{12}\,\lambda_1 & \cdots & V_{1n}\,\lambda_1 \\ V_{21}\,\lambda_2 & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ V_{n1}\,\lambda_n & V_{n2}\,\lambda_n & \cdots & V_{nn}\,\lambda_n \end{pmatrix}$$

ce qui montre que V doit être une matrice diagonale.

c) Remarquons tout d'abord que $U(1)^n$ n'est pas un sous-groupe invariant de $U(n)$. Soit en effet une matrice Λ diagonale arbitraire élément de $U(1)^n$, et V un élément quelconque de $U(n)$. Alors $V\,\Lambda V^\dagger$ n'est pas a priori une matrice diagonale : on obtient en effet, en laissant V parcourir $U(n)$, l'ensemble des matrices qui se diagonalisent en Λ (par la matrice de passage V), et qui ne sont en géneral pas diagonales elles-mêmes. Il convient donc de distinguer classes à droite et classes à gauche.

Soit $U \in U(n)$, diagonalisée en Λ par V élément de $U(n)$, suivant (25). Considérons les classes à gauche : supposons que V_1 est un élément appartenant à la même classe que V, i.e. qu'il existe $\Lambda' \in U(1)^n$ tel que $V^{-1}\,V_1 = \Lambda'$, i.e. $V_1 = V\,\Lambda'$. Alors

$$V_1^\dagger = \Lambda'^\dagger\,V^\dagger \qquad \text{et} \qquad V_1\,\Lambda\,V_1^\dagger = V\,\Lambda'\,\Lambda\,\Lambda'^\dagger\,V^\dagger = V\,\Lambda\,V^\dagger$$

où l'on a utilisé, pour obtenir la dernière égalité, le fait que Λ et Λ' commutent. Ceci prouve que les éléments appartenant à la même classe à gauche codent le même élément U de $U(n)$, pour Λ fixé.

11) a) Différentiant $U = V\,\Lambda\,V^\dagger$ on obtient $dU = dV\,\Lambda\,V^\dagger + V\,d\Lambda\,V^\dagger + V\,\Lambda\,dV^\dagger$. Or $V\,V^\dagger = 1$ donc $dV\,V^\dagger + V\,dV^\dagger = 0$, soit $dV^\dagger = -V^\dagger\,dV\,V^\dagger$, d'où l'on déduit, en posant $dX = V^\dagger\,dV$ que

$$dU = V\,V^\dagger\,dV\,\Lambda\,V^\dagger + V\,d\Lambda\,V^\dagger - V\,\Lambda\,V^\dagger\,dV\,V^\dagger = V\,(d\Lambda + [dX,\,\Lambda])\,V^\dagger\,.$$

Combinant $dV\,V^\dagger + V\,dV^\dagger = 0$ avec $dX^\dagger = dV^\dagger\,V$ on déduit que $dX^\dagger = -V^\dagger\,dV = -dX$ et donc que dX est antihermitienne. Notons que l'élément de matrice (i,j) de dX s'écrit $dX_{i,j} = \sum_k V_{ik}\,dV^*_{jk}$. On vérifie ainsi explicitement sur cette expression le caractère antihermitique de dX en traduisant l'identité $dV\,V^\dagger = -V\,dV^\dagger$ en termes d'éléments de matrice.

Comme $dV = V\,dX$ et que nous avons montré plus haut que V parcourt $U(n)/U(1)^n$, on peut réduire dX à varier dans l'ensemble des matrices antihermitiennes sans termes diagonaux. En vérifiera explicitement dans la question suivante que les termes diagonaux de dX ne contribuent pas à la métrique.

b)

$$\mathrm{tr}\, dU\, dU^\dagger = \mathrm{tr}\, \left(d\Lambda + [dX,\, \Lambda]\right) \left(d\Lambda^\dagger + [dX,\, \Lambda^\dagger]\right) \tag{26}$$

Or $([dX,\, \Lambda])_{ij} = dX_{ij}(\lambda_j - \lambda_i)$ dont les éléments diagonaux sont nuls. Les termes $\mathrm{tr}\, d\Lambda^\dagger\, [dX,\, \Lambda]$ et $\mathrm{tr}\, d\Lambda\, [dX,\, \Lambda^\dagger]$ sont donc nuls, puisque $d\Lambda$ ne possède que des termes diagonaux. On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\, dU\, dU^\dagger = \mathrm{tr}\, d\Lambda\, d\Lambda^\dagger + \mathrm{tr}[dX\, \Lambda - \Lambda\, dX]\, [dX\, \Lambda^\dagger - \Lambda^\dagger\, dX] \\
= \;& \sum_i |d\alpha_i|^2 + \mathrm{tr}\, [dX\, \Lambda - \Lambda\, dX]\, [dX\, \Lambda - \Lambda\, dX]^\dagger = \sum_i |d\alpha_i|^2 + \sum_{i,j} |dX\, \Lambda - \Lambda\, dX|^2_{i,j} \\
= \;& \sum_i |d\alpha_i|^2 + \sum_{i,j} |dX_{ij}|^2\, |\lambda_i - \lambda_j|^2 = \sum_i |d\alpha_i|^2 + 2\sum_{i<j} |dX_{ij}|^2\, |\lambda_i - \lambda_j|^2
\end{aligned}$$

c) Le tenseur métrique s'écrit donc, dans les variables $\xi^\alpha = (\alpha_i,\, \mathcal{R}eX_{ij},\, \mathcal{I}mX_{ij})$,

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & \cdots & & & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
\vdots & \cdots & & 0 & 1 & & & \\
0 & \cdots & & & 0 & 2|\lambda_1 - \lambda_2|^2 & & \\
0 & \cdots & & & & 0 & 2|\lambda_1 - \lambda_2|^2 & \\
\vdots & & & & & & & \\
 & & & & & & & 2|\lambda_{n-1} - \lambda_n|^2
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c}
\alpha_1 \\ \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \mathcal{R}eX_{12} \\ \mathcal{I}mX_{12} \\ \vdots \\ \mathcal{I}mX_{n-1\, n}
\end{array}
\end{array}$$

d) Le déterminant du tenseur métrique s'écrit

$$g = 2^{n(n-1)} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^4 \,.$$

Or

$$\begin{aligned}
|\lambda_i - \lambda_j|^2 &= \left|e^{i\alpha_i} - e^{i\alpha_j}\right|^2 = \left(e^{i\alpha_i} - e^{i\alpha_j}\right)\left(e^{-i\alpha_i} - e^{-i\alpha_j}\right) \\
&= \left(e^{i\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}} - e^{-i\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}}\right) e^{i\frac{\alpha_i+\alpha_j}{2}} \left(e^{-i\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}} - e^{i\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}}\right) e^{-i\frac{\alpha_i+\alpha_j}{2}} \\
&= 4\sin^2 \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}
\end{aligned}$$

et donc

$$g = 2^{3n(n-1)} \prod_{i<j} \sin^4 \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \,.$$

On en déduit que

$$d\mu(U) = 2^{\frac{3n(n-1)}{2}} \left(\prod_{i<j} \sin^2 \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \right) \left(\prod_i d\alpha_i \right) d\mu(V)\,.$$

Remarque : la constante multiplicative est arbitraire. On pourrait par exemple choisir comme métrique $1/2\,\mathrm{tr}(dU\,dU^\dagger)$ (comme on l'a fait pour SU(2)), ce qui ne fait que changer cet constante multiplicative.