

# QCD SANS PEINE

ECOLE INTERNATIONALE JOLIOT CURIE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE

11 - 17 septembre 2005

O. Pène

Laboratoire de Physique Théorique,  
Unité mixte de recherche du CNRS-UMR 8627  
Université de Paris XI, Bâtiment 211, 91405 Orsay Cedex, France

**Abstract**

## 1 Introduction

Les différents domaines théoriques et expérimentaux qui sont au programme de cette école, et bien d'autres encore, dépendent d'une même théorie, la chromodynamique quantique (QCD). Cette théorie a vu le jour à la fin des années 60, cf l'historique présenté dans cette école [5], et elle n'a cessé d'accumuler les succès expérimentaux. Il est tout à fait exceptionnel, sinon unique, dans l'histoire des sciences, qu'un domaine aussi riche et aussi varié dépende soit expliqué par une théorie dont l'énoncé des principes soit si compacte et le nombre des paramètres si restreint. Il s'agit bien d'une théorie, non d'un modèle.

La contrepartie de ces caractéristiques extraordinaires de la QCD sont sa complexité conceptuelle et pratique. La théorie quantique des champs n'est pas facile à concevoir sous tous ses aspects. Celle-ci l'est encore moins à cause de cette propriété mystérieuse nommée le confinement. Elle est aussi très difficile à calculer en pratique car, étant une théorie d'interactions fortes, il n'existe pas de petit paramètre dans laquelle on puisse faire un développement <sup>1</sup> en série.

---

<sup>1</sup>Même dans son domaine perturbatif, où on développe en fonction de la constante  $\alpha_s$ , cette dernière n'est pas si petit que cela.

Notre objet sera donc de présenter, de façon aussi peu technique que possible, les principaux concepts à l'oeuvre ici, d'essayer de faire sentir comment ils pourraient expliquer les propriétés étranges de la QCD et en particulier le confinement, enfin d'indiquer les méthodes de calcul non-perturbative et surtout la QCD sur réseau, seule méthode non-perturbative *ab initio*. Nous essaierons de choisir les exemples en relation avec l'objet de cette école.

## 2 LES DEFINITIONS DE BASE

### 2.1 Lagrangien

Le Lagrangien de la QCD s'écrit

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + i \sum_f \bar{q}_f^i \gamma^\mu (D_\mu)_{ij} q_f^j - \sum_f m_f \bar{q}_f^i q_{fi}, \quad (1)$$

où  $i, j, a$  sont les indices de couleur,  $f$  est la saveur du quark ( $f = u, d, s, c, b, t$ ),  $\mu, \nu$  les indices de Lorentz,  $q$  est un champ de spineur de dimension 12 (couleur  $\times$  Dirac) et où

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

$$(D_{\mu\nu})_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - ig_s \sum_a \frac{\lambda_{ij}^a}{2} A_\mu^a$$

De cette simple formule on peut en principe dériver une quantité immense de prédictions.

Deux tâches s'offrent à la physique: comprendre et résoudre la QCD. Comprendre signifie par exemple comprendre le confinement, la brisure de la symétrie chirale, etc. Résoudre la QCD signifie être capable d'en dériver les conséquences expérimentales. Il y a encore beaucoup à faire ! On n'y parviendra pas "sans peine". Peut-on esquisser "sans peine" le chemin à parcourir ? On va s'y essayer.

### 2.2 Invariance de jauge

Les transformations de jauge infinitésimales sont définies par un ensemble de huit fonction réelles infinitésimales  $\epsilon^a(x)$ ,  $a = 1, 8$ , et la transformation des champs <sup>2</sup>

$$\delta A_\mu^a(x) = \frac{1}{g_s} \partial_\mu \epsilon^a(x) + f^{abc} A_\mu^b(x) \epsilon^c(x), \quad \delta q(x) = i \epsilon^c(x) \frac{\lambda^c}{2} q(x) \quad (2)$$

Les transformation de jauge non infinitésimales sont définies par une matrice unitaire  $3 \times 3$ :  $g(x)$  définie en chaque point de l'espace-temps et les transformations

$$q(x) \rightarrow g(x) q(x), \quad W(x, y) \rightarrow g(x) W(x, y) g^{-1}(y) \quad (3)$$

---

<sup>2</sup>L'indice de saveur  $f$  du champ de quark est omis et il en sera ainsi chaque fois que sa présence ne sera pas nécessaire.

où on a défini la “ligne de Wilson”

$$W(x, y) = P \left[ \exp \left\{ i g_s \int_{C_{x,y}} d_z^\mu A_\mu(z) \right\} \right] \quad (4)$$

$C$  étant un chemin arbitraire menant de  $x$  à  $y$  et  $P$  indiquant un produit ordonné en chemin. Quand  $g(x)$  s’approche de l’unité, on retrouve l’eq. (2) si on substitue  $g(x) \simeq 1 + i\epsilon(x)$ . Les transformations de jauge forment un groupe  $SU(3)^N$  où  $N$  est le nombre de points de l’espace-temps. Dans l’espace temps continu,  $N$  est infini. Sur un réseau fini  $N$  est fini et, comme  $SU(3)$  est un groupe compact de volume fini,  $SU(3)^N$  est aussi de volume fini.

A partir de eq. (3) on peut vérifier que

$$\bar{q}(x) W(x, y) q(y), \quad \text{et} \quad Tr[W(x, x)] \quad (5)$$

sont invariants de jauge. Une ligne de Wilson qui se referme sur elle-même telle que  $W(x, x)$  est appelée une boucle de Wilson. Nous verrons plus tard d’autres opérateurs invariants de jauge.

• *Une transformation de jauge ne transforme pas un état physique dans un autre, comme le fait une transformation de Lorentz, une transformation  $P, C$  et  $T$ , où une transformation chirale. Seuls les états invariants de jauge représentent des états physiques. L’invariance de jauge reflète le fait qu’il y a redondance des degrés de liberté de la théorie de champ par rapport aux degrés de liberté physiques.*

**Toute observable physique est invariante de jauge, cependant il est souvent utile, voire nécessaire, de faire le calcul dans une jauge fixée.**

## 2.3 Les fonctions de Green

Une théorie des champs est résolue si on est capable d’en calculer toutes les fonctions de Green. En effet on connaît alors tous les éléments de la “matrice-S”, les largeurs de désintégration, les facteurs de forme, etc.

**Mais, caculer toutes les fonctions de Green est un vaste et difficile programme ! Par où s’y prendre ?**

Les fonctions de Green sont (en général) des valeurs moyennes dans le vide de produits ordonnés en temps d’opérateurs. Les opérateurs sont construits à partir des champs de la QCD. Par exemple le propagateur d’un quark (de  $y$  vers  $x$ ) s’écrit:

$$S(x, y) \equiv \langle 0 | T [q(x) \bar{q}(y)] | 0 \rangle \quad (6)$$

$S(x, y)$  est une matrice  $12 \times 12$  (Dirac  $\times$  couleur). Noter que ce propagateur n’est pas invariant de jauge. Il faudra donc fixer une jauge pour faire ce calcul, sinon le résultat donnerait zéro.

La fonction de corrélation de deux courants électromagnétiques est définie comme

$$T_{\mu\nu}(x, y) \equiv \sum_f e_f \langle 0 | T [J_\mu^f(x) J_\nu^f(y)] | 0 \rangle = - \sum_f e_f \langle 0 | Tr [\gamma_\mu S_f(x, y) \gamma_\nu S_f(y, x)] | 0 \rangle \quad (7)$$

où  $e_f$  est la charge électrique du quark  $f$  ( $2/3 e$  ou  $-1/3 e$ ) et pour chaque saveur le courant vectoriel est défini par

$$J_\mu(x) \equiv \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x) \quad (8)$$

Noter que la fonction de Green (7) est invariante de jauge contrairement à celle de (6). En effet, la partie imaginaire de  $T_{\mu\nu}(x, y)$ , transformée de Fourier, est proportionnelle à la section efficace totale  $e^+ e^- \rightarrow$  hadrons. C'est une observable physique dont on trouve un résumé des mesures dans le PDG [1], cf fig. 1.

Nous verrons plus tard que ce type de fonctions de Green invariantes de jauge est essentiel pour déterminer les propriétés des hadrons.

## 2.4 L'intégrale de chemin

### 2.4.1 Le principe

Les fonctions de Green sont des valeurs moyennes dans le vide de produits d'opérateurs. La question de calculer les fonctions de Green se ramène donc à celle de calculer les valeurs moyennes d'opérateurs dans le vide.

Ces valeurs moyennes sont définies à partir de **l'intégrale de chemin** [2]. Soit une théorie de champs génériques  $\phi(x)$ , définie par un Lagrangien  $\mathcal{L}[\phi]$  par exemple la théorie  $\lambda\phi^4$ :

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \quad (9)$$

On peut montrer que la valeur moyenne d'un opérateur  $\mathcal{O}$  est définie par

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \Pi_x \mathcal{D}\phi(x) \mathcal{O} \exp \{iS[\phi]\}}{\int \Pi_x \mathcal{D}\phi(x) \exp \{iS[\phi]\}} \quad (10)$$

où l'action  $S[\phi]$  est définie par

$$S[\phi] \equiv \int d^4x \mathcal{L}[\phi(x)] \quad (11)$$

Par exemple le propagateur d'un méson  $\phi$  sera donné en prenant  $\mathcal{O} = T[\phi(x)\phi(y)]$ :

$$\langle T[\phi(x)\phi(y)] \rangle = \frac{\int \Pi_x \mathcal{D}\phi(x) T[\phi(x)\phi(y)] \exp \{iS[\phi]\}}{\int \Pi_x \mathcal{D}\phi(x) \exp \{iS[\phi]\}} \quad (12)$$

Les intégrales de chemin, eq. (10) ont une infinité de variables d'intégration: une par champ en chaque point de l'espace temps. On devine donc que ces intégrales ne sont pas faciles à définir mathématiquement et quand on y parvient, qu'elles sont très divergentes: on y reviendra à propos de *la renormalisation*.

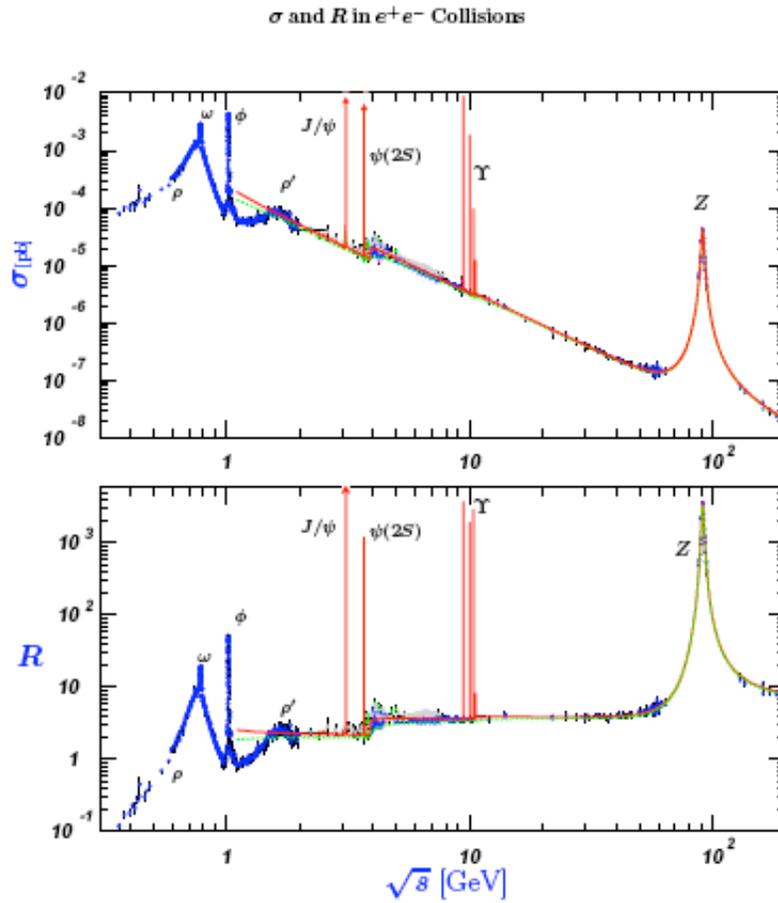


Figure 1: *Figure extraite de PDG [1]: il s'agit en haut de la section efficace totale  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$  en fonction de l'énergie. En bas c'est la même quantité divisée par  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ . Si les quarks étaient des particules libres, ce rapport serait égal à la somme des charges (en unité de  $e$ ) au carré des quarks tels que  $2m_f < \sqrt{s}$ .*

### 2.4.2 Les déterminants fermioniques

Les champs  $\phi$  ci-dessus sont des champs bosoniques. Que faire des fermions ? La partie du Lagrangien (1) de la QCD qui contient le champ de quark de saveur  $f$  est

$$\mathcal{L}_{q_f} = \bar{q}_f(x) \left[ \gamma_\mu \left( i \partial_\mu + g_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a \right) - m_f \right] q_f(x) \equiv \sum_{x,y} \bar{q}_f(x) M_f(x,y) q_f(y) \quad (13)$$

où  $M_f(x,y)$  est une matrice dans l'espace produit direct de l'espace-temps  $\times$  couleur  $\times$  spin:

$$M_f(x,y) = \sum_\mu \gamma^\mu \left[ \frac{i}{2a} (\delta_{x+\hat{\mu},y} - \delta_{x-\hat{\mu},y}) + g_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a \delta_{x,y} \right] - m_f \delta_{x,y} \quad (14)$$

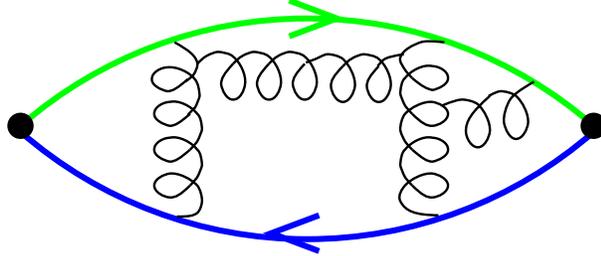
où une notation discrétisée a été utilisée.  $\hat{\mu}$  est un vecteur de longueur  $a$  dans la direction  $\mu$ . Le terme en  $\partial_\mu$  est diagonal dans l'espace de couleur, le terme de masse est diagonal dans l'espace de spin et de couleur. **La matrice  $M_f$  est appelée "opérateur de Dirac"**. On calcule d'abord, pour une valeur fixée des champs de jauge, l'intégrale de chemin sur les champs de quark. L'intégrale se fait sur des variables d'intégration qui ne sont pas des nombres ordinaires mais les éléments d'une "algèbre de Grassman" que nous désignerons par les symboles  $\eta_f(x), \bar{\eta}_f(x)$ . Donnons juste le résultat:

$$\int \Pi_{x,y,f} \mathcal{D}\bar{\eta}_f(x) \mathcal{D}\eta_f(y) \exp \left[ \sum_f \int d^4z d^4t \bar{\eta}_f(z) i M_f(z,t) \eta_f(t) \right] = \Pi_f \text{Det} [i M_f] \quad (15)$$

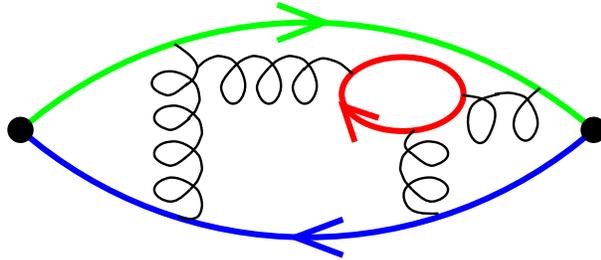
Le résultat de l'intégrale sur les variables fermioniques est donc simplement le produit des déterminants des opérateurs de Dirac afférents à toutes les saveurs de quarks. Cette belle formule très compacte ne doit pas nous tromper: ce produit de déterminants est un objet très difficile à calculer. Il est une fonctionnelle non locale des champs de jauge. Le sens physique de ce produit de déterminants est le suivant: il prend en compte l'effet des boucles de quarks, c'est à dire, la polarisation du vide par les paires quark-antiquark virtuelles. En d'autres termes, le déterminant décrit l'effet des quarks de la mer. La figure 2.A illustre la dynamique dite "quenched" quand on néglige ces déterminants et la figure 2.B illustre la prise en compte de ces déterminants.

### 2.4.3 L'intégrale des champs de jauge

Une fois intégrés les champs fermioniques, il faut intégrer les champs de jauge. Ce sont des champs bosoniques, mais l'invariance de jauge impose des précautions particulières: la dérivation de la formule de l'intégrale de chemin est assez délicate



(A) Quenched QCD: quark loops neglected



(B) Full QCD

Figure 2: *Effet du déterminant fermionique*

et ne peut se faire “sans peine”. Donnons d’abord quelques définitions: Nous appelons “configuration de jauge” une fonction suffisamment régulière  $x \rightarrow A_\mu^a(x)$ . C’est dans l’espace des configurations de jauge que se fait l’intégrale de chemin. Nous appelons “orbite de jauge” l’ensemble des transformées de jauge d’une configuration de jauge. Pour les quantités invariantes de jauge le résultat est le même sur toute une orbite. Une orbite est de volume fini sur un réseau fini (volume du groupe de jauge), mais de volume infini dans le continu. Il en résulte que l’approche est nécessairement différente dans le continu et sur un réseau. Sur un réseau fini on peut définir l’intégrale de chemin sur tout l’espace des configurations de jauge et ensuite diviser le résultat par le volume du groupe de jauge. Dans le continu il faut fixer la jauge. Dans les cas courants la jauge est fixée en multipliant l’intégrand de l’intégrale de chemin par

$$B[\partial_\mu A_\mu^a] \equiv \exp \left[ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \right] \quad (16)$$

Noter que quand  $\xi \rightarrow 0$  on retrouve la jauge de Landau:

$$B[\partial_\mu A_\mu^a] \rightarrow \Pi_{x,a} \delta(\partial_\mu A_\mu^a) \implies \partial_\mu A_\mu^a = 0 \quad (17)$$

Cependant il a été montré [3] que l’invariance de jauge impose d’ajouter le déterminant de “l’opérateur de Faddeev-Popov” qui exprime l’effet d’une tran-

formation de jauge infinitésimale  $1 + i \epsilon^b$  sur  $\partial_\mu A_\mu^a$ :

$$\partial_\mu A_\mu^a \rightarrow \partial_\mu A_\mu^a + \frac{1}{g_s} [\partial^2 \delta_{ac} + g_s f^{abc} A_\mu^b \partial_\mu] \epsilon^c \quad (18)$$

$$\mathcal{F}_{ax;cy} \equiv \frac{\delta[\partial_\mu A_\mu^a(x)]}{\delta \epsilon^c(y)} = \frac{1}{g_s} \left[ \partial^2 \delta^4(x-y) \delta_{ac} + g_s f^{abc} \partial_\mu (A_\mu^b \delta^4(x-y)) \right] \quad (19)$$

Pour résumer l'intégrale de chemin sur les champs de jauge s'écrit

$$Z = \int \Pi_{\mu,a,x} \mathcal{D}A_\mu^a(x) B[\partial_\mu A_\mu^a] Det[\mathcal{F}] \Pi_f Det[i M_f] \exp[i S_G] \quad (20)$$

où on a utilisé les eqs. (15), (17), (19) et où

$$S_G = - \int d^4x \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x) \quad (21)$$

Notons en passant que l'on est tenté, nous souvenant de l'eq. (15) dans laquelle l'intégration des champs fermioniques s'est traduite par le déterminant de Dirac, d'interpréter le déterminant de Faddeev-Popov  $Det[\mathcal{F}]$  comme le résultat de l'intégration de champs anti-commutants, scalaires et octets de couleur. Ces champs sont appelés les "fantômes de Faddeev-Popov" et ont donné lieu à de nombreux développements, en particulier à la symétrie BRST. Mais nous en resterons là.

Pour conclure la valeur moyenne d'un opérateur  $\mathcal{O}$  de la QCD s'écrira:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \Pi_{\mu,a,x} \mathcal{D}A_\mu^a(x) B[\partial_\mu A_\mu^a] Det[\mathcal{F}] \Pi_f Det[i M_f] \exp[i S_G] \mathcal{O}}{\int \Pi_{\mu,a,x} \mathcal{D}A_\mu^a(x) B[\partial_\mu A_\mu^a] Det[\mathcal{F}] \Pi_f Det[i M_f] \exp[i S_G]} \quad (22)$$

Pour  $\mathcal{O}$  on pourra considérer le propagateur d'un quark, d'un gluon, d'un hadron et bien d'autres fonctions de Green. Nous possédons donc maintenant un moyen formel de calculer n'importe quelle fonction de Green de la QCD et donc de la résoudre complètement. Il faut cependant trouver des moyens pratiques de les calculer.

## 2.5 Passage au temps imaginaire

Un ingrédient très embarrassant de l'équation (22) se trouve dans les phases complexes dues aux facteurs  $i$  de l'exponentielle. L'action  $S_G$  est réelle, mais multipliée par  $i$ . De même pour le déterminant fermionique. Les configurations de jauge dont l'action est très grande ne contribuent pas de façon significative à l'intégrale de chemin par une compensation des fortes oscillations de phase du terme  $\exp[i S_G]$ . En pratique, dans un calcul numérique ces fortes oscillations produisent beaucoup de bruit.

Une méthode fréquemment employée est de pratiquer un prolongement analytique vers le temps imaginaire. Nous définissons le temps  $\tau = x_4 = ix_0 = it$

et de même  $p_4 = ip_0 = iE$ . Le produit scalaire dans la métrique de Lorentz,  $x_0 p_0 - \vec{x} \cdot \vec{p}$ , devient  $-\sum_{\mu=1,4} x_\mu p_\mu$ . A un signe global, sans importance, près nous sommes dans la métrique Euclidienne. L'intégrale de chemin contient le facteur  $\exp[i \int d^4x \mathcal{L}^{\mathcal{M}}]$ . On remplace la variable d'intégration  $dx_0$  par  $dx_4 = idx_0$ , on effectue le même changement de variable sur toutes les composantes temporelles des champs et on change le signe du Lagrangien Euclidien, le facteur exponentiel devient alors  $\exp[-\int d^4x \mathcal{L}^{\mathcal{E}}]$ . Le changement de signe du Lagrangien fait que le Lagrangien Minkowskien  $\int(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$  devient  $\int(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$  en Euclidien, ce qui en fait un Lagrangien positif. Ce fait est très important: **le facteur exponentiel de l'intégrale de chemin Euclidienne est un nombre positif inférieur à 1. On peut interpréter  $\int(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$  comme un "Hamiltonien" à quatre dimensions.** Les déterminants fermioniques, le déterminant de Faddeev-Popov et le terme de fixation de jauge  $B[\partial_\mu A_\mu^a]$  sont aussi, dans l'Euclidien, des densités positives.

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \Pi_{\mu,a,x} \mathcal{D}A_\mu^a(x) B[\partial_\mu A_\mu^a] Det[\mathcal{F}] \Pi_f Det[M_f] \exp[-S_G] \mathcal{O}}{\int \Pi_{\mu,a,x} \mathcal{D}A_\mu^a(x) B[\partial_\mu A_\mu^a] Det[\mathcal{F}] \Pi_f Det[M_f] \exp[-S_G]} \quad (23)$$

où l'action Euclidienne est positive:

$$S_G = \int d^4x \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x) \quad (24)$$

Pour résumer le passage à l'Euclidien a transformé l'intégrale de chemin  $\exp[iS]$  en une intégrale de type Boltzman,  $\exp[-S]$ ,  $S$  ayant les propriétés d'un Hamiltonien à quatre dimensions. Le rapport (22) devient une valeur moyenne au sens probabiliste (23) avec une distribution de probabilité positive.

En passant à l'Euclidien on a transformé le problème de la théorie des champs quantique en un problème de physique statistique classique. Toutes les méthodes de la physique statistique, tous les algorithmes sont à notre disposition. La QCD sur réseau de même que les règles de somme de QCD utilisent le prolongement Euclidien.

La question qui se pose est la suivante. En supposant que l'on ait résolu la théorie dans son prolongement Euclidien, comment revenir dans le domaine physique, c'est à dire dans le domaine Minkowskien. La réponse est simple en principe et elle s'appuie sur les propriétés d'analyticité des fonctions de Green. Si on connaissait parfaitement les fonctions de Green Euclidiennes on pourrait en faire le prolongement analytique vers le Minkowskien. Le problème est que la connaissance que nous pouvons acquérir dans l'Euclidien n'est pas exacte. La précision du prolongement analytique de l'Euclidien vers le Minkowskien dépend du processus considéré. *Dans le cas où un seul hadron est présent c'est exceptionnellement simple. Le facteur d'évolution  $\exp[-Et]$  devient  $\exp[-iEt]$ .*

### 3 La renormalisation et la liberté asymptotique

La belle formule (22) résume d’une façon compacte le programme de la solution de la QCD. Cependant le nombre de variables d’intégration est l’infini du continu si bien que cette écriture élégante ne recouvre aucun objet mathématique bien défini. Après avoir fait une rotation vers le temps imaginaire on parvient à (23), un objet que les mathématiciens savent définir: une intégrale de Wiener. Mais ces intégrales sont divergentes, même après avoir compensé les singularités du numérateur et du dénominateur. Ces divergences sont dites “ultraviolettes” car elles proviennent des grandes impulsions dans les boucles de Feynman. Nous parlerons de leur traitement par la renormalisation dans la sous-section suivante.

Même après avoir renormalisé la théorie, les intégrales de chemin sont excessivement difficiles à calculer. Il existe des méthodes pratiques de calcul analytique ou numériques: QCD sur réseau, méthodes perturbatives, théories effectives, modèles qui seront vues plus tard dans cette école. Dans l’immédiat nous essaierons de décrire qualitativement certaines propriétés qui résultent de l’intégrale de chemin, et en particulier il sera question des **propriétés du vide de la QCD**

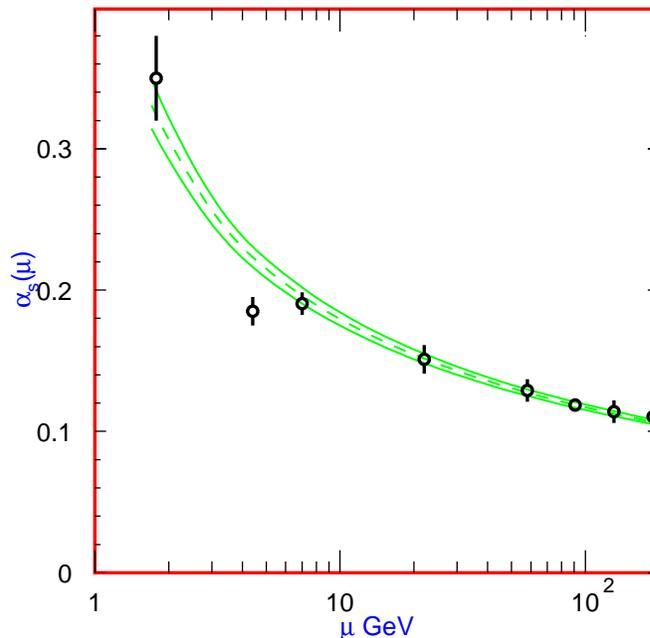


Figure 3: *Constante de couplage forte [1]*

## 3.1 Renormalisation

Nous allons aborder la renormalisation d’une façon dénuée de toute “pénibilité”. La qcd possède en tout et pour <sup>3</sup> tout  $n_f + 1$  **paramètres, la constante de couplage et les masses des quarks**. Comme dans n’importe quelle théorie physique il faut fixer ces paramètres, appelés “paramètres nus”, à partir de  $n_f + 1$  mesures indépendantes. La théorie est bonne si on peut, après cela, prédire correctement toute autre mesure. On pourrait résumer la théorie de la renormalisation de la QCD à ces propos de bon sens. Par exemple on ajuste la masse du méson  $\rho$ , du  $\pi^+$  et du  $\pi^0$ , du  $K$ , du  $D$ , du  $B$  (oublions le  $t$ ) et tout le reste est prédictible !!

Dans les théories de champs, il y a cependant une complications due aux “singularités ultraviolettes”: De nombreuses fonctions de Green  $G(x - y)$  divergent quand  $x \rightarrow y$ . On doit “régulariser” ces divergences. Il y a de nombreuses méthodes de régularisation qui toutes dépendent d’une coupure ultraviolette que nous nommons génériquement  $\Lambda$ . Bien sûr, la QCD ne peut être validée que si les prédictions de physique sont indépendantes de la méthode de régularisation et convergent vers une valeur commune quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . En principe il doit en être ainsi. Les paramètres nus dépendent, bien sûr, de  $\Lambda$  et de la méthode de régularisation.

### 3.1.1 Schémas de renormalisation

On en aurait fini avec la renormalisation si il était facile d’aller des  $n_f + 1$  paramètres nus jusqu’aux observables physiques. Mais c’est en général très difficile. Des étapes intermédiaires sont nécessaires. Par exemple on doit calculer des fonctions de Green en termes des champs fondamentaux de la théorie (gluons, quarks, fantômes). Ces objets ne sont pas des observables physiques, ils dépendent de la jauge, on ne peut pas les prendre de l’expérience. Alors on fait appel à un “**schéma de renormalisation**”. Il y a un très grand nombre de tels schémas. Tous les résultats intermédiaires du calcul dépendent de ce schéma de même qu’ils dépendent de la jauge. Le résultat final du calcul, celui qui concerne les observables physiques, doit lui être totalement indépendant du schéma et de la jauge. En outre, au sein d’un schéma donné apparaît une dépendance additionnelle dans une échelle d’énergie que l’on appelle le “point de renormalisation”.

Nous allons juste illustrer cela sur un exemple simple pour en montrer le fonctionnement. Un schéma nommé “MOM” impose par exemple que le propagateur renormalisé du gluon soit égal, dans la jauge dite de Feynman, au propagateur d’un gluon libre, c’est à dire à  $-i g_{\mu\nu} \delta_{ab} / p^2$  pour une valeur précise de la norme de l’impulsion:  $p^2 = \mu^2$ .  $\mu$  est ici cette échelle d’énergie, ce point de renormalisation. Cette échelle d’énergie est arbitraire en principe, mais elle doit être fixée pour que

---

<sup>3</sup>Nous omettons le terme de violation de CP qui ajouterait un paramètre.

la procédure de renormalisation soit définie. La procédure est alors la suivante. Etant donnés les  $n_f + 1$  paramètres nus de la théorie, on calcule, par un procédé à définir, le propagateur du gluon résultant de toutes les interactions de la QCD. Le résultat dépendra bien sûr de ces paramètres et de la valeur du cut-off  $\Lambda$ . Par exemple on calcule l'effet des diagrammes à une boucle de gluon et de quark. On appelle le résultat de ce calcul le "propagateur nu",  $-i g_{\mu\nu} \delta_{ab} G_b$ . On calcule une constante de renormalisation  $Z_3$  qui fournit le "propagateur renormalisé"  $-i g_{\mu\nu} \delta_{ab} G_r$  par une simple multiplication:

$$G_r(p^2, \mu^2) \equiv Z_3(\mu^2, \Lambda^2) G_b(p^2, \Lambda^2), \quad Z_3(\mu^2, \Lambda^2) = \mu^2 G_b(p^2, \Lambda^2). \quad (25)$$

La valeur de  $Z_3$  ci dessus exprime simplement que pour  $p^2 = \mu^2$  le propagateur renormalisé est le propagateur d'un gluon libre -  $G_r(\mu^2, \mu^2) = 1/\mu^2$  - elle découle des règles adoptées pour ce schéma.

Le résultat dépend évidemment de  $\mu$ . S'il en était autrement cela signifierait qu'en ayant ajusté le propagateur renormalisé au propagateur libre pour une échelle  $\mu^2$  il serait égal au propagateur libre pour toutes les valeurs de  $p^2$ , donc que la QCD se comporterait comme une théorie de gluons libres !! C'est loin d'être le cas.

On peut de façon semblable renormaliser d'autres fonctions de Green, la constante de couplage forte et les masses des quarks au moyen d'un nombre fini de constantes de renormalisations. On dit que **la QCD est renormalisable** <sup>4</sup>

## 3.2 La dépendance d'échelle

La dépendance d'échelle des fonctions de Green, de la constante de couplage et des masses des quarks est très riche d'enseignements. Il faut d'abord préciser que si le choix du point de renormalisation  $\mu$  est arbitraire, il est en pratique préférable de choisir  $\mu$  de l'ordre des impulsions-énergies typiques du processus que l'on étudie. On le voit dans l'exemple ci-dessus où le propagateur du gluon est particulièrement simple pour  $p^2 = \mu^2$ . Par exemple si on étudie les désintégrations du  $Z_0$  au LEP on aura intérêt à choisir  $\mu$  de l'ordre de 45 GeV. Si on s'intéresse au facteur de forme du nucléon à un transfert de  $Q^2 \sim (10 \text{ GeV})^2$  on prendra  $\mu = 10 \text{ GeV}$ . Donc, bien que  $\mu$  ne soit pas une grandeur physique, la dépendance en  $\mu$ , par exemple de la constante de couplage, véhicule un important message de physique.

Hé bien **La constante de couplage diminue quand  $\mu$  augmente et elle tend vers zero pour  $\mu \rightarrow \infty$** . C'est la "liberté asymptotique". Ce résultat essentiel peut se démontrer en théorie des perturbations, il est confirmé par des méthodes non perturbatives et mieux encore par l'expérience. La figure 3 montre une compilation des mesures expérimentales de cette constante en fonction de l'énergie.

---

<sup>4</sup>La théorie effective chirale est renormalisable au prix d'un nombre infini, mais ordonné, de constantes de renormalisation. On dit que la théorie n'est pas renormalisable.

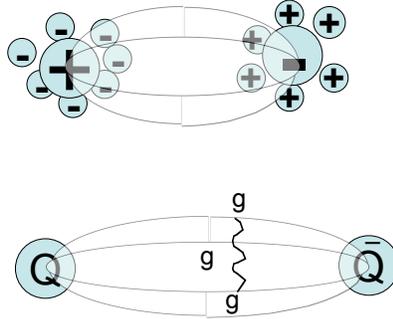


Figure 4: *effet d'écran, en haut, et d'anti-écran en bas*

### 3.2.1 Effet d'écran et d'anti-écran

Cette dépendance d'échelle de la constante de couplage peut paraître paradoxale : en termes simples, elle signifie que l'interaction entre deux sources augmente avec la distance. En électrodynamique l'effet est inverse et on peut le comprendre de la façon suivante: on suppose deux charges électriques statiques de signe opposé, elles tendent à polariser le vide, c'est à dire à faire surgir du vide des charges + et - qui vont naturellement écranter les charges statiques, cf fig. 4 (dessin du haut). Cet effet d'écran augmente naturellement avec la distance entre les charges et l'interaction décroît avec la distance.

Mais en QCD on observe un effet d'anti-écran: l'interaction augmente avec la distance (diminue avec l'énergie). D'où vient cette différence ? les quarks et les gluons polarisés transversalement exercent pourtant un effet d'écran comme les électrons en électrodynamique, mais cet effet est contrebalancé par l'interaction entre les lignes de champs, cf fig. 4 (dessin du bas) due au fait que les gluons portent une charge de couleur.

Avant de développer les idées qui tentent d'expliquer cet effet d'anti-écran ainsi que le confinement qui lui est lié, nous allons conclure par un résumé des conséquences de la liberté asymptotique.

### 3.2.2 Les conséquences de la liberté asymptotique

- 1) A grande énergie-impulsion la constante de couplage est petite. Cela justifie l'usage de la théorie des perturbations et explique le comportement quasi partonique des quarks et gluons à grande énergie, cf fig. 5. Cette propriété permet de donner un sens à la QCD quand on fait tendre la coupure ultraviolette vers l'infini alors que les théories qui ont le comportement inverse (fort couplage petite distance, dite infra-rouges libres) telles l'électrodynamique ou la théorie  $\lambda\phi^4$  ne le permettent pas sous peine de

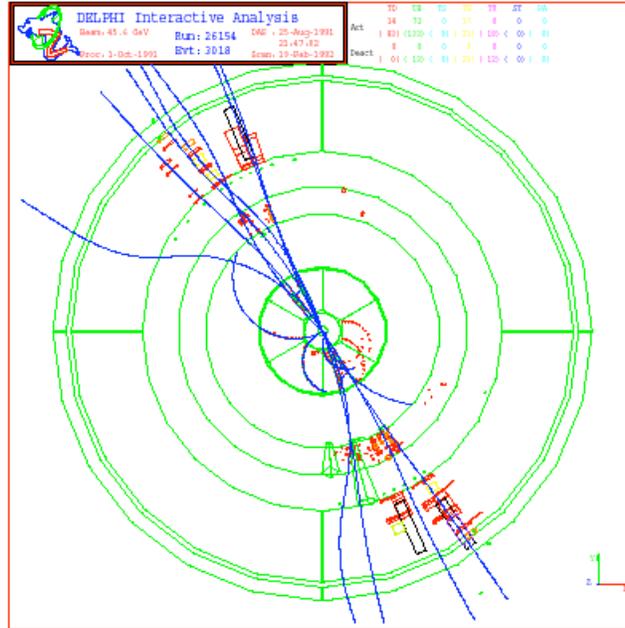


Figure 5:  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ , 2 jets, dans l'expérience DELPHI au LEP [4],

devenir “triviales” à cette limite. Lié à cela il résulte aussi que la QCD sur réseau a une limite “du continu” (quand la maille du réseau tend vers zéro) bien définie.

- 2) A grande distance, quand la constante de couplage n'est plus petite ( $\alpha_s \sim 1$ ), la théorie des perturbations ne s'applique plus du tout, les modes infrarouges deviennent cruciaux, les propriétés non-perturbatives du vide de QCD sont déterminantes. Le confinement se manifeste (sans que cela soit bien compris). La brisure spontanée de la symétrie chirale se manifeste aussi.

**Cette dualité ultraviolet/infrarouge, perturbatif/non-perturbatif, polarise toute la QCD. Elle lui donne toute sa richesse.** Historiquement la liberté asymptotique a permis d'éclaircir le mystère de l'interaction forte, cf le

cours de Patrick Aurenche [5], et cette découverte a été saluée par le prix nobel de physique 2004. La maîtrise de l’aspect non-perturbatif reste un défi.

### 3.3 Les parties dominantes de l’intégrale de chemin

L’intégrale de chemin, eq. (23), permet de définir formellement toutes les quantités d’intérêt physique de la QCD. Il est bon de s’attarder sur quelques unes de ses propriétés. Il s’agit d’une intégrale fonctionnelle. L’espace d’intégration est l’espace des configurations de jauge défini dans la section 2.4.1: une configuration générique de jauge est la donnée d’une valeur générique tout à fait arbitraire des champs de jauge en tous les points de l’espace-temps (on peut ajouter des contraintes de continuité et de dérivabilité). Cet espace des configurations de jauge est très vaste. Grâce au passage au temps imaginaire la fonctionnelle à intégrer est positive. Une méthode approchée pour ce genre d’intégrale, la méthode du col, consiste à effectuer l’intégrale près des maxima locaux de l’intégrand, c’est à dire près des minima locaux de l’action (l’intégrale de chemin est schématiquement  $\int \exp(-S)$ ). Autrement dit, sur cet immense espace de configurations de jauge l’intégrale sera dominée par les régions où l’action n’est pas très grande, au voisinage des minima locaux c’est à dire des des solutions classiques des équations de champs.

Il y a de très nombreux minima locaux, mais le minimum absolu est, à une transformation de jauge près, le “vide trivial”:  $A_\mu(x) = 0$  pour lequel  $G_{\mu\nu}^a(x)G_a^{\mu\nu}(x) = 0$  et par conséquent  $S_G = 0$  à partir de l’équation (24). La théorie des perturbations prend en compte les fluctuations quantiques autour de ce vide trivial. Il en résulte que la théorie des perturbations ne peut pas rendre compte de la richesse des autres minima. On peut comprendre qualitativement pourquoi, cependant, les modes à grande impulsion de la QCD sont bien décrits par la théorie des perturbation: ces modes correspondent à une action  $S_G$  très grande, et - souvenons-nous que l’action euclidienne est une “énergie” d’un système statistique classique de dimension 4 - à cette “énergie”, les variations des différents vides sont peu sensibles, de même qu’un avion de haute altitude passe sans effort d’une vallée à l’autre.

Par contre, les propriétés des modes de basse fréquence sont très profondément modifiées par l’effet de ces nombreux minima. Une des conséquences les plus remarquables est que dans le vide de la QCD la valeur moyenne

$$\langle 0|G_{\mu\nu}^a(0)G_a^{\mu\nu}(0)|0 \rangle > 0. \quad (26)$$

En effet, les minima non triviaux de l’action ont évidemment une action positive, et une valeur de  $G_{\mu\nu}^a(x)G_a^{\mu\nu}(x)$  strictement positive. En utilisant le fait que tous les translatés d’un tel minimum seront aussi des minima non triviaux on engendre des “modes zéros” de densité  $G_{\mu\nu}^a(0)G_a^{\mu\nu}(0)$  non nulle. Quand on calcule la valeur moyenne dans le vide  $\langle 0|G_{\mu\nu}^a(0)G_a^{\mu\nu}(0)|0 \rangle$  en utilisant la formule 23,

on ne trouve pas zéro à cause de la contribution de ces vides non triviaux. On désigne le fait que  $\langle 0|G_{\mu\nu}^a(0)G_a^{\mu\nu}(0)|0 \rangle > 0$ , comme signalant l'existence d'un "condensat  $G^2$ ".

L'explication ci-dessous est par trop naïve car elle passe sous silence des problèmes complexes de renormalisation. Elle illustre cependant le lien qui existe entre la structure complexe des minima de l'action et les propriétés non-perturbatives du vide de la QCD.

## 4 Les mystères de la QCD non perturbative

Nous avons vu dans la section précédente une caractéristique importante du vide de la QCD, le condensat  $G^2$ , et plus généralement que les caractéristiques particulières du vide de la QCD ouvrent des perspectives sur ses propriétés non-perturbatives. Cela ne suffit cependant pas à expliquer les grands mystères de la QCD : le confinement, la brisure de la symétrie chirale, etc. A dire vrai leur explication n'est pas encore connue, mais il existe des tentatives d'explication à partir de *modèles du vide de la QCD*. Nous allons en présenter quelques uns dans cette section. Cependant nous allons d'abord discuter de l'existence de critères de confinement.

### 4.1 La boucle de Wilson

Ouvrons d'abord une parenthèse. Considérons un état physique quelconque  $|n \rangle$  d'énergie  $E_n$  et un opérateur  $O(t)$  dépendant du temps  $t$  tel que  $|n \rangle = O(0)|0 \rangle$  et  $O^\dagger(0)|n \rangle = |0 \rangle$ , où  $|0 \rangle$  représente le vide. Alors la valeur moyenne

$$\langle 0|O^\dagger(t)O(0)|0 \rangle \propto e^{-E_n t} \quad (27)$$

Il s'agit de la traduction euclidienne de l'évolution quantique  $\propto e^{-iEt}$  qui devient une décroissance exponentielle. Venons-en à la boucle de Wilson. Nous avons défini (4) la ligne de Wilson et la boucle de Wilson (5) dont la trace est un invariant de jauge. Considérons la boucle de Wilson représentée en fig. 6. On peut monter que les lignes horizontales représentent des sources de couleur statiques (liées à des quarks de masse infinie). On peut donc interpréter la fig. 6 comme la création d'un système invariant de jauge constitué d'une paire quark-antiquark statiques, distants de  $R$  qui se propage durant un temps  $T$ . Selon ce que nous venons de rappeler, la valeur moyenne de cette boucle de Wilson est donc proportionnelle à  $\exp(-ET)$  où  $E$  est l'énergie du système de sources statiques distantes de  $R$ , la valeur du potentiel  $Q\bar{Q}$ . Quand  $R$  devient grand, considérons deux cas: le potentiel linéaire, c'est à dire confinant, et un potentiel que tend vers zéro à l'infini, comme le potentiel de Coulomb, non-confinant.

$$\langle 0|Tr[W(x, x)]|0 \rangle \propto e^{-\sigma RT} = e^{-\sigma A} \quad \langle 0|Tr[W(x, x)]|0 \rangle \propto e^{-cP} \quad (28)$$



Figure 6: *Boucle de Wilson*

où  $A = RT$  est l'aire insérée dans la boucle de Wilson et  $P$  est le périmètre de cette boucle. Wilson a donc proposé la “loi des aires” (à gauche ci-dessus) comme critère du confinement. La loi en périmètre (à droite ci-dessus) est au contraire un indice de non confinement.

Les simulations numériques confirment l'existence de cette loi  $\exp(-\sigma A)$  pour la QCD sans quarks dynamiques. En présence de quarks dynamiques les choses se compliquent. Si on construit comme ci-dessus un système de charges de couleur statiques  $Q\bar{Q}$  à distance  $R$ , il devient à grande distance dynamiquement avantageux qu'une paire  $q\bar{q}$  de quarks légers issue du vide constitue deux “mésons” statiques  $Q\bar{q}$  et  $q\bar{Q}$ . L'énergie potentielle du système reste finie et devient constante, égale à moins deux fois l'énergie de liaison des mésons statiques<sup>5</sup>, quand les sources statiques s'éloignent à l'infini escortées de leur partenaire léger<sup>6</sup>.

La boucle de Wilson avec quarks dynamiques se comportera donc  $\propto e^{-cP}$  même en cas de confinement, et le critère de la loi en  $e^{-\sigma A}$  ne peut donc plus servir de critère de confinement. De fait aucun critère de confinement, aucun paramètre d'ordre du confinement, n'a été trouvé dans le cas de quarks dynamiques. Notons néanmoins que le confinement garde son sens premier: les états colorés ne peuvent constituer des états asymptotiques, et c'est bien le cas dans l'exemple ci-dessus puisque des quarks du vide apparaissent pour neutraliser la couleur des sources statiques.

<sup>5</sup>Rappelons que dans le cas confinant l'énergie de liaison est négative.

<sup>6</sup>On peut aussi se représenter les sources de couleur statiques comme des quarks de masse tendant vers l'infini. Dans les raisonnements ci-dessus on doit alors soustraire systématiquement la masse du quark lourd pour rester avec des quantités finies.

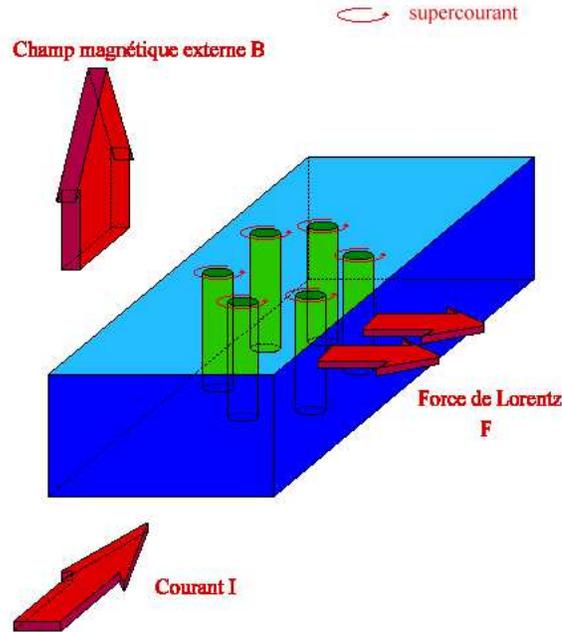


Figure 7: Représentation d'un supraconducteur de type II traversé par un fort champ magnétique [6].

## 4.2 Une image du confinement: l'effet Meissner dual

### 4.2.1 les supraconducteurs de type II

La figure 7 représente un supraconducteur de type II traversé par un fort champ magnétique. A la température considérée, l'état d'énergie la plus basse du matériau est l'état supraconducteur. Dans cet état le champ magnétique ne peut pas pénétrer. La nécessité de contourner le matériau coûte beaucoup d'énergie. Le "compromis" que trouve le système est le percement d'un "tube d'Abrikosov" non supraconducteur dans le matériau. Le champs magnétique traverse le matériau en empruntant les tubes de sorte que le flux magnétique dans chaque tube soit quantifié <sup>7</sup>. Un compromis s'instaure qui fixe la section du tube. Si cette section est trop faible, le champ magnétique aura une énergie  $\propto \vec{B}^2$  qui diverge à flux constant à section nulle. Si la section est trop grande, la perte d'énergie due à la transformation du matériau de supraconducteur en un matériau normal est trop

<sup>7</sup>Cette quantification est imposée par le fait que le long d'une boucle entourant le tube le champ électromagnétique doit retrouver sa phase après un tour.

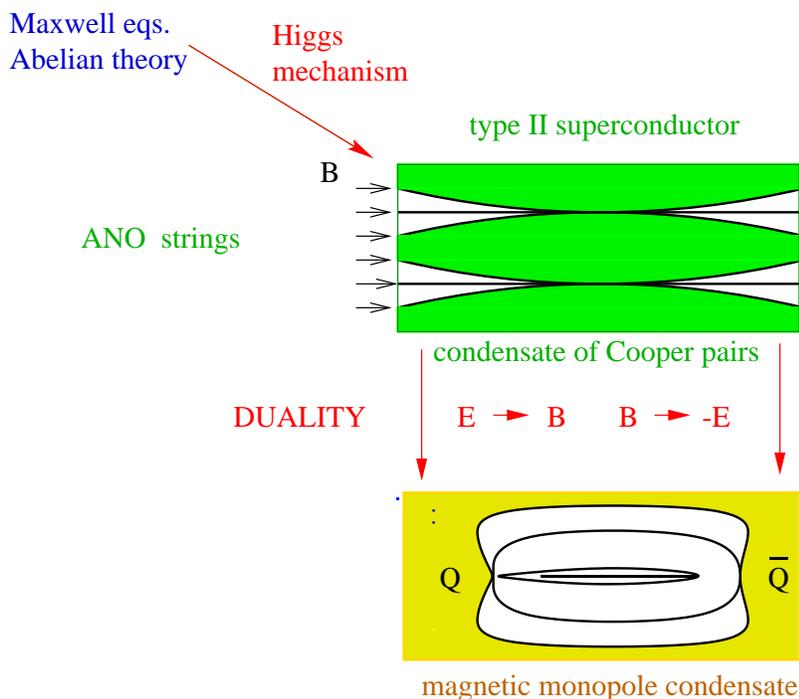


Figure 8: *Effet meissner dual, figure de la référence [9]*

grande.

#### 4.2.2 L'effet Meissner dual

On explique donc le confinement en supposant que la QCD présente un effet Meissner dual [7, 8], dual au sens de la dualité électrique magnétique, ou plus précisément électrique/chromomagnétique et magnétique/chromoélectrique. Cet effet est bien illustré dans la fig. 8 emprunté à la référence [9]. Le vide est supposé supraconducteur dual, c'est à dire que le champ chromoélectrique (électrique de couleur) ne peut traverser ce milieu sans le transformer en vide non-supraconducteur (peu différent du vide perturbatif). Donc, entre deux sources de couleur statiques  $Q$  et  $\bar{Q}$ , les lignes de champ chromoélectrique doivent transformer le vide au prix d'un coût énergétique. De ce fait les lignes de champ, au lieu de s'écarter comme en électromagnétisme, ont dynamiquement intérêt à percer un tube dont la section est déterminée selon le même principe que celle des tubes d'Abrikosov décrits ci-dessus. L'énergie de ces tubes cylindriques de section déterminée est bien sûr proportionnelle à la longueur du tube, c'est à dire à la distance entre  $Q$  et  $\bar{Q}$ : *on a donc expliqué, dans ce modèle, le potentiel linéaire comme dû à un tube de flux chromoélectrique.*

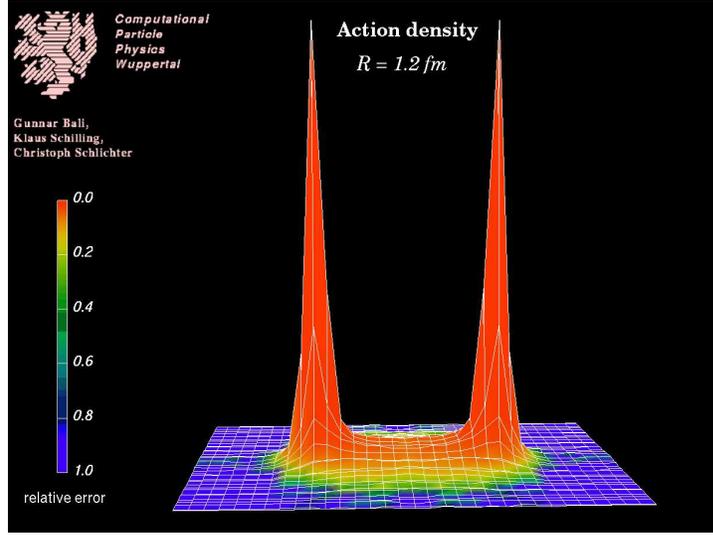


Figure 9: *Tube de flux en QCD sur réseau entre deux sources statiques [10].*

Ce modèle de confinement a une conséquence intéressante: selon la théorie BCS la supraconductivité est due à un condensat de paires d'électrons, les “paires de Cooper”. La supraconductivité duale suppose donc un condensat de monopôles magnétiques [8]. Ce modèle semble confirmé par les calculs sur réseau. Les tubes de flux chromoélectriques entre sources statiques le sont aussi, cf la fig. 9 d'après la référence [10].

### 4.3 Une autre vision du vide de la QCD: les instantons

Un instanton (anti-instanton) est une solution classique des équations de champ de la QCD [11, 12]. Pour simplifier les notations nous allons les écrire dans la théorie de jauge  $SU(2)$ :

$$A_\mu^a(x) = \frac{2}{g} \frac{\bar{\eta}_{\mu\nu}^a x^\nu \rho^2}{(x^2 + \rho^2)x^2} \quad (29)$$

où

$$\eta_{ij}^a = \epsilon^{aij}, \quad \eta_{i4}^a = \delta_i^a, \quad \eta_{4i}^a = -\delta_i^a. \quad (30)$$

L'action des instantons et des anti-instantons est une valeur constante:

$$S = \int \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} = \frac{8\pi^2}{g^2} \quad (31)$$

Asymptotiquement, à l'infini, l'instanton devient une pure jauge:

$$A_\mu^a(x) \simeq g(x) \frac{1}{ig} \partial_\mu g^{-1}(x) \text{ pour } |x| \rightarrow \infty \text{ avec } g(x) = \frac{(x_4 + i\vec{x} \cdot \vec{\tau})\rho^2}{|x|^3} \quad (32)$$

Donc, à l'infini, les champs d'instantons sont les transformés de jauge du champ trivial  $A_\mu^a(x) = 0$ . Mais on ne peut pas les ramener en même temps en tous les points d'une hypersphère à l'infini à un champ trivial à cause d'une propriété d'enroulement topologique<sup>8</sup> qui se manifeste dans la singularité de la fonction  $g(x)$  en  $x = 0$ , (32): il est impossible d'effectuer dans tout l'espace-temps la transformation de jauge (32) à cause de cette singularité. Les instantons ont un nombre topologique +1, les anti-instantons ont un nombre -1. Il existe des solutions avec  $\pm n$  entier. Ce sont des solutions classiques, des minima locaux de l'action euclidienne, qui ne peuvent évoluer classiquement vers la solution triviale à cause de cette propriété topologique.

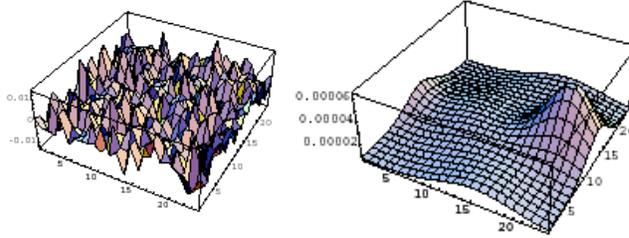


Figure 10: *Représentation de la densité d'action euclidienne sur une tranche d'une configuration de jauge d'un réseau [16]. A gauche la configuration telle qu'elle sort de la simulation. A droite après qu'un procédé de refroidissement ait éliminé les fluctuations quantiques de petit longueur d'onde: on voit de grandes structures dont on peut démontrer qu'elles sont proches d'instantons (anti-instantons)*

### 4.3.1 Modèle de liquide d'instantons

Imaginons un instanton et un anti-instanton éloignés l'un de l'autre. La configuration de jauge a pour nombre topologique  $n = 0$ , ce n'est pas une solution classique, cette configuration peut classiquement évoluer vers la solution triviale

<sup>8</sup>Ce phénomène topologique est un peu analogue au fait qu'un fil noué qui est enroulé  $n$  fois autour d'un poteau ne peut être déroulé.

par annihilation de l'instanton avec l'anti-instanton. Mais cela est peu probable si ils sont éloignés. Si le recouvrement de l'instanton et de l'anti-instanton sont faibles, on a presque une solution classique des équations de champs puisque les équations sont locales et que localement on est presque dans une configuration d'instanton, ou d'anti-instanton ou dans une jauge pure.

Le modèle de liquide d'instanton [13, 14] généralise cette idée à une superposition d'un nombre  $n^+$  d'instantons et  $n^-$  d'anti-instantons. le nombre topologique est  $n^+ - n^-$ . Il a été montré que ce modèle ne donne pas d'explication du confinement. Par contre il donne une bonne explications de la brisure de la symétrie chirale qui est traitée dans le cours de Bachir Moussalam [15]. Ce modèle du vide de la QCD semble aussi confirmé par la QCD sur réseau comme l'indique la fig. 10

*Il ne faut pas s'étonner que deux représentations différentes du vide, Meissner-dual et liquide d'instantons semblent confirmées toutes deux par les simulations : il s'agit de deux aspects d'une réalité complexe.*

## 5 Méthodes de calcul non-perturbatif

### 5.1 La QCD sur réseau

La seule méthode de calcul ab initio de la QCD non-perturbative est la QCD sur réseau. mais c'est une méthode numériquement lourde. Elle consiste d'abord à discrétiser l'espace-temps euclidien, cf fig. 11-a. Les calculs se font sur un volume fini. Les mailles sont typiquement plus petites que 0.1 fm car il faut que cette longueur soit dans le domaine de la QCD perturbative et donc analytiquement sous contrôle, alors que les phénomènes à grande distance, de l'ordre du fm, sont simulés numériquement. Le volume a typiquement des côtés plus grand que 3 fm pour pouvoir contenir des hadrons. Sur chaque lien du réseau le champ de jauge est implémenté sous la forme d'une petite ligne de Wilson:

$$U_\mu(x) = P \left\{ e^{iag_0 \int_0^1 d\tau A_\mu^i(x + \tau a\hat{\mu}) \frac{\lambda_i}{2}} \right\} \quad (33)$$

où  $U_\mu(x) \in SU(3)$  et la transformation de jauge s'écrit (3):

$$U_\mu(x) \rightarrow g(x)U_\mu(x)g^{-1}(x + a\hat{\mu}). \quad (34)$$

L'action de jauge vaut

$$S[\mathcal{U}] = - \sum_{x,\mu,\nu} \frac{1}{3} \text{Re} \{ \text{Tr} [1 - P(x)_{\mu,\nu}] \} \quad (35)$$

où  $P$  est une plaquette définie comme le produit ordonné de matrices  $U$  autour d'un carré élémentaire, cf fig. 11-b :

$$P_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + a\hat{\mu})U_{-\mu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U_{-\nu}(x + a\hat{\nu}). \quad (36)$$

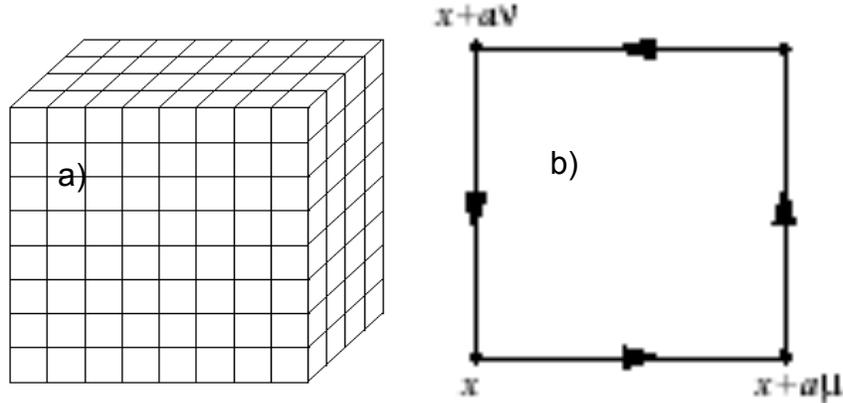


Figure 11: a) représentation schématique d'un réseau cubique. b) représentation d'une "plaquette".

L'intégrale de chemin, intégrée sur toutes les orbites de jauge, s'écrit

$$\int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) e^{-\frac{6}{g^2} S[\mathcal{U}]} \quad (37)$$

On peut montrer que l'on retrouve les formules du continu (23,24) quand  $a \rightarrow 0$ . Il est habituel de définir  $\beta = 6/g^2$ .

Si on veut calculer une quantité invariante de jauge on n'a pas besoin de fixer la jauge, on intègre sur toutes les configurations de jauge, le volume du groupe de jauge  $SU(3)^N$  ( $N$  est le nombre de points du réseau) se factorise et s'élimine quand on calcule une valeur moyenne. On n'a donc pas besoin du terme de fixation de jauge ni du déterminant de Faddeev-Popov.

Par contre on a besoin du déterminant fermionique, cf section 2.4.2. Il existe de nombreuses façon d'écrire l'action des quarks, c'est à dire l'opérateur de Dirac discrétisé: action de Wilson, staggered, overlap, domain wall, etc. Ce sujet étant assez long nous allons le sauter et nous supposons que nous possédons une action des quarks  $\sum_f \bar{q}_f M_f q_f$  satisfaisante pour chaque problème.

La valeur moyenne d'un opérateur  $O$  invariant de jauge est donnée par

$$\langle 0|O|0 \rangle = \frac{\int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) e^{-\frac{6}{g^2} S[\mathcal{U}]} \prod_f \text{Det}[M_f] O}{Z} \quad (38)$$

où  $f$  est la saveur du quark et

$$Z = \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) e^{-\frac{6}{g^2} S[U]} \prod_f \text{Det}[M_f] \quad (39)$$

Cette intégrale dépend de centaines de millions de variables d'intégration. Il faut donc une méthode de calcul appropriée: ce sera la méthode de Monte-carlo.

## 5.2 Exemple de calcul sur réseau: le nucléon

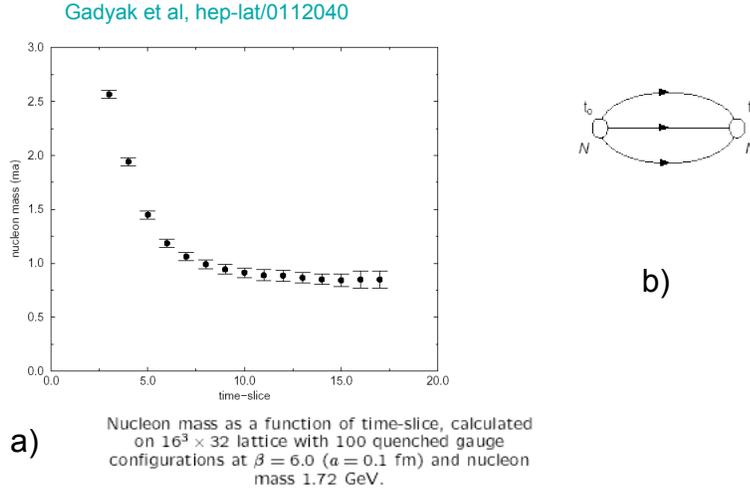


Figure 12: a) *Masse effective en fonction du temps. On voit qu'à temps long cette masse converge vers la masse de l'état fondamental, le nucléon.* b) *Le calcul de la fonction de Green se fait à partir du calcul de trois propagateurs des quarks de valence.*

Nous voulons calculer le propagateur d'un nucléon et en déduire sa masse. L'opérateur à calculer est une fonction de Green à deux points:

$$\langle 0 | N_a(x) \bar{N}_a(y) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int [DA_\mu][D\psi][D\bar{\psi}] e^{-\beta S[U]} N_a(x) \bar{N}_a(y) \quad (40)$$

où  $\beta = 6/g^2$ .  $\bar{N}_a(y)$  crée un nucléon et les résonances  $N^{J=1/2+}$ ,  $N_a(x)$  annihile le nucléon et les résonances  $N^{J=1/2+}$ .  $N_a(x)$  et  $\bar{N}_a(y)$  sont des "champs interpolants" du nucléon, écrits en termes des champs de quarks de sorte à avoir les

bons nombres quantiques,  $J = 1/2$  et  $P = +$ :

$$N_a \equiv \bar{\epsilon}^{ijk}(u^i C \gamma_5 d^j) u_a^k, \quad \bar{N}_a \equiv \epsilon^{ijk}(\bar{u}^i C \gamma_5 \bar{d}^j) \bar{u}_a^k \quad (41)$$

Pour considérer un nucléon d'impulsion  $\vec{p}$  on fait la transformée de Fourier dans l'espace:

$$G_{2ab}(t_x, \vec{p}) \equiv \sum_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \langle 0 | N_a(x) \bar{N}_b(0) | 0 \rangle, \quad (42)$$

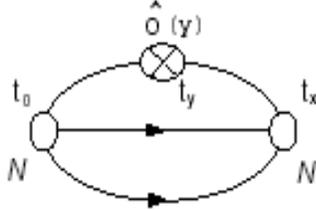


Figure 13: *Fonction de Green utilisée pour le calcul des facteurs de forme d'un nucléon. Le champ interpolant en  $t_0$  crée une somme de baryons. Si  $t_y - t_0$  est suffisamment long, seul l'état fondamental, le nucléon, subsiste au temps  $t_y$  quand agit le courant. Il faut ensuite que  $t_x - t_y$  soit suffisamment long pour que seul l'état fondamental soit présent à droite. Par "suffisamment long" on veut dire de l'ordre de 10 unités réseau comme nous l'indique la fig. 12-a.*

En utilisant le principe de complétude:  $1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$  on obtient

$$G_{2ab}(t_x, \vec{p}) = V_3 \sum_n \langle 0 | N_a(0) | n \rangle \langle n | \bar{N}_b(0) | 0 \rangle e^{-E_n t_x}, \quad (43)$$

Où  $V_3$  est le volume d'espace du réseau. Quand le temps  $t_x$  devient grand, seul le terme d'énergie la plus faible  $E_0$  contribue, les autres étant exponentiellement

supprimés. On peut vérifier ce fait en calculant en fonction du temps l'énergie effective:

$$E_{\text{eff}}(t_x) = \ln \left[ \frac{G_{2ab}(t_x, \vec{p})}{G_{2ab}(t_x + 1, \vec{p})} \right]. \quad (44)$$

Quand le temps est suffisamment grand ce rapport tend vers une constante qui n'est autre que l'énergie du nucléon d'impulsion  $\vec{p}$ . Un exemple à impulsion nulle en est donné par la courbe a) de la fig. 12-a, emprunté à la ref. [17].

Le diagramme b) de la fig. 12 illustre la manière dont la valeur moyenne (40) est calculée. Dans chaque configuration de jauge qui contribue à notre échantillon Monte-carlo nous calculons le propagateur du quark. Cela se fait en inversant l'opérateur de Dirac, c'est à dire la matrice  $M_f$  qui est une très grande matrice creuse (des centaines de millions de lignes et de colonnes). Les propagateurs des quarks sont alors combinés selon les tenseurs de l'eq. (41).

### 5.2.1 Les facteurs de forme

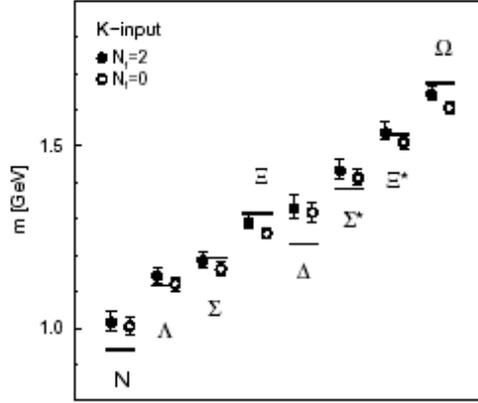
Les facteurs de forme sont un objet important de cette école [18]. Nous n'allons pas détailler la façon dont la QCD sur réseau les calcule. Disons qu'il s'agit d'une activité importante et bien contrôlée. Outre les fonctions de Green à deux points présentées ci-dessus, on calcule les fonctions de Green à trois points comme c'est illustré dans la fig. 13. Nous présenterons certains résultats dans la section 6.1.

### 5.2.2 Spectroscopie des baryons

Nous présentons, fig. 14, un exemple de spectroscopie complète des baryons effectué par la collaboration JLQCD [19].

## 5.3 Le modèle des quarks

Cette question est traitée dans le cours de J.-M. Le Goff [18]. Cette méthode ne doit pas être négligée, même si on ne sait la dériver de la QCD que dans le cas des quarks lourds ou dans le cas des fonctions d'onde sur le cône lumière. En effet ce modèle donne une description transparente de la spectroscopie hadronique et cette description rencontre un succès étonnant. Le modèle des quarks permet aussi d'étudier la dynamique, les facteurs de forme, etc. C'est en général la seule méthode d'étude des hadrons excités (résonances) qui sont d'un abord très difficile avec les méthode de la QCD sur réseau et des règles de somme de la QCD.



JLQCD Collaboration: hep-lat/0212039

Figure 14: Les cercles creux montrent les prédictions du calcul sans quarks dynamiques, les cercles pleins correspondent à un calcul avec deux quarks dynamiques, les barres horizontales correspondent aux données expérimentales.

## 5.4 Le développement en produit d'opérateur et les règles de somme de la QCD

### 5.4.1 Un outil rigoureux: le développement en produit d'opérateur

Nous prendrons l'exemple de la fonction de Green (7) dont la valeur expérimentale de la partie imaginaire a été montrée dans la fig. 1. Il a été montré [5] que si les quarks étaient libres, le rapport  $R$  (fig. 1-bas) serait égal à  $\sum_f 3e_f^2$ , sommé sur les quarks pour lesquels on est au dessus du seuil. Le facteur 3 est dû à la couleur: trois types de quarks. Cela signifie  $R = 2$  en dessous du seuil du charme, puis  $R = 10/3$  jusqu'au seuil de la beauté etc. On voit sur la fig. 1-bas qu'il y a ces paliers, mais avec des structures saillantes correspondant aux résonances. La QCD perturbative nous indique qu'il faut corriger cette image simple par l'effet des gluons.

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-iqx} \langle 0 | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | 0 \rangle = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \times$$

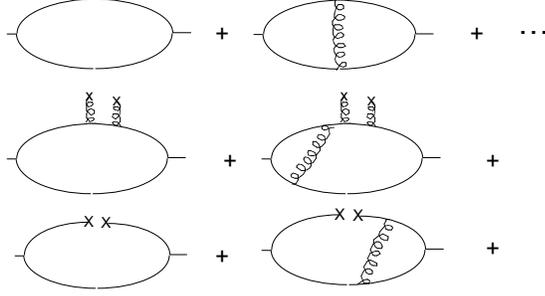


Figure 15: *Diagrammes dominants contribuant à la fonction de Green (7). La première ligne correspond à la QCD perturbative, la seconde inclut le condensat  $G^2$ , et la troisième le condensat  $\bar{q}q$ .*

$$\left\{ -\frac{1}{4\pi^2} \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \right\} \quad (45)$$

où  $Q^2 = -q^2$  et les points de suspensions représentent les ordres plus élevés en  $\alpha_s$ . Cette formule ne peut expliquer les pics aigus de fig. 1. Ces derniers sont non-perturbatifs. Dans la section 3.3 nous avons souligné qu'un effet non-perturbatif important de la QCD était l'existence du condensat  $G^2$ , c'est à dire de la valeur moyenne non nulle dans le vide de  $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}(0)$ . Un autre condensat important,  $\langle 0|\bar{q}q(0)|0 \rangle$  a à voir avec la brisure spontanée de la symétrie chirale.

Le groupe "SVZ" [20, 21] a proposé d'utiliser cette propriété non-perturbative pour la phénoménologie. Ils utilisent un principe découvert par Wilson [22] selon lequel un produit d'opérateurs, tel que le produit des courants  $j_\mu$  dans (45), peut s'exprimer comme une somme d'opérateurs rangés selon leur dimension décroissante, multipliés par des coefficients aujourd'hui dénommés "coefficients de Wilson". On nomme ce développement "OPE" (Operator Product Expansion). Comme le produit (45) est invariant de jauge, on se contente des opérateurs invariants de jauge. La formule (45) devient

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-iqx} \langle 0|T(j_\mu(x)j_\nu(0))|0 \rangle = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \times \left\{ -\frac{1}{4\pi^2} \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \frac{\alpha_s}{12\pi Q^4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}(0) + \frac{2m_q}{Q^4} \bar{q}q(0) \dots \dots \dots \right\} \quad (46)$$

où les points de suspension renvoient aux termes d'ordre supérieur en  $\alpha_s$  et aux termes d'ordre supérieur en  $1/Q^2$ .

La contribution perturbative (45) contient la contribution de l'opérateur de dimension minimale, l'opérateur identité: 1. Les deux termes suivants dans (46) contiennent les opérateurs invariants de jauge non triviaux de dimension la plus faible. Ils ont dimension 4 et les coefficients de Wilson qui les multiplient contiennent le facteur  $1/(Q^2)^2$  de dimension -4. A grand  $Q^2$  c'est la contribution pertur-

bative qui domine, en accord avec la liberté asymptotique. Quand  $Q^2$  diminue, les opérateurs sous-dominants donnent une contribution non-négligeable.

Cependant ces contributions, qui restent “douces”, ne suffiront pas à engendrer les pics aigus de la figure 1. Il faudrait baisser encore  $Q^2$  et l’on sortirait du domaine de validité du développement OPE. Que faire ?

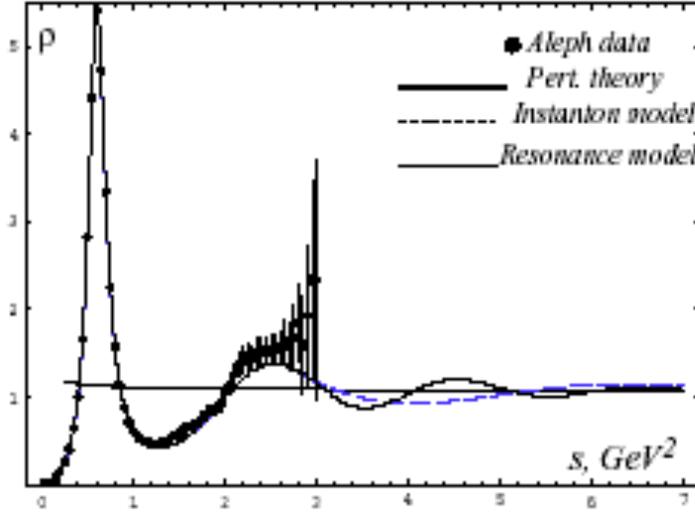


Figure 16: *Comparaison du rapport  $R$  dans le secteur du quark léger avec la théorie des perturbations corrigée par l’OPE. On voit la dualité en moyenne entre les quarks (théorie des perturbations) et le résultat expérimental. la résonance  $\rho$  est manifestement non-perturbative*

#### 5.4.2 Les règles de somme et leur utilisation en phénoménologie

Les auteurs de [20, 21] proposent d’utiliser le fait qu’en moyenne le résultat de la formule (46) représente la courbe expérimentale 1. C’est illustré dans la figure 16 empruntée à [23]. A partir de cette remarque, et en faisant quelques manipulations mathématiques simples, ils proposent une hypothèse qui permet des prédictions. Définissons la fonction  $\Pi(q^2)$  par

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-iqx} \langle 0 | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | 0 \rangle = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \times \Pi(q^2) \quad (47)$$

La prédiction théorique pour  $\Pi^{\text{theo}}(q^2)$  se lit simplement à partir de l'eq. (46). Le rapport  $R$  montré en bas de la figure 1 vaut:

$$R^q(s) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 12\pi Q_q^2 \text{Im}(\Pi(s)) \quad (48)$$

où  $\Pi(q^2)$  et sa partie imaginaire sont reliés par une relation de dispersion:

$$\Pi(Q^2) = -\frac{Q^2}{\pi} \int ds \frac{\text{Im}(\Pi(s))}{s(Q^2 + s)}, \quad Q^2 = -q^2. \quad (49)$$

On peut estimer que pour  $Q^2$  suffisamment grand (disons  $\sim 4 \text{ GeV}^2$ ),  $\Pi^{\text{theo}}(q^2)$  est assez proche du  $\Pi(q^2)$  exact. Cependant le  $\Pi(q^2)$  a une partie imaginaire avec les pics de résonances déjà observés alors que la partie imaginaire de  $\Pi^{\text{theo}}(q^2)$  n'a qu'une variation douce. La relation de dispersion (49) nous démontre donc l'accord *en moyenne* des parties imaginaires de  $\Pi^{\text{theo}}(q^2)$  et de  $\Pi(q^2)$  bien qu'elles aient des allures si différentes.

Le groupe SVZ [20, 21] veut faire, en utilisant cet "accord en moyenne", des prédictions sur la résonance la plus légère du spectre (il s'agira du méson  $\rho$ ) à partir du développement de l'eq. (46). Ils proposent une opération mathématique nommément une transformation de Borel:

$$-Q^2 \frac{d}{dQ^2} \Pi(Q^2) = \int_0^\infty Q^2 d\left(\frac{1}{M^2}\right) \tilde{\Pi}(M^2) e^{-Q^2/M^2} \quad (50)$$

de sorte que la partie imaginaire  $\text{Im} \tilde{\Pi}(s)$  est concentrée vers le bas du spectre.

$$\tilde{\Pi}(M^2) = \frac{1}{\pi M^2} \int ds \text{Im} \Pi(s) e^{-s/M^2} \quad (51)$$

A ce stade on suppose que la partie imaginaire est saturée par la résonance  $\rho$  supposée étroite

$$\text{Im} \Pi(s) e^{-s/M^2} \simeq \pi f_\rho^2 e^{-m_\rho^2/M^2} \quad (52)$$

où  $f_\rho$  est la constante de désintégration du méson  $\rho$  en  $e^+e^-$ , c'est à dire son couplage au courant électromagnétique. Des eqs. (46,50) on tire, en négligeant le condensat  $\bar{q}q$  :

$$\tilde{\Pi}(M^2) = \frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) + \frac{1}{24} \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}(0) | 0 \rangle}{M^4} \quad (53)$$

Il faut une estimation du condensat  $G^2$  que l'on peut extraire d'une autre application de la même méthode, par exemple au méson  $J/\psi$ . Il résulte de ce calcul simplifié:

$$f_\rho = \sqrt{e} \frac{m_\rho}{2\pi} = 0.26, \quad \text{expérience} : f_\rho = 0.28 \quad (54)$$

Cette présentation archi-simplifiée de la méthode dite "des règles de somme de la QCD" montre le petit miracle qui s'est opéré: à partir de la QCD perturbative

corrigée par l'OPE on prédit des grandeurs telles que  $f_\rho$  de nature véritablement non-perturbative. Sans les termes OPE, c'est à dire si on avait utilisé seulement la formule théorique (45) le résultat (54) n'aurait pas été possible. Cela indique que les corrections OPE ont quelque chose à voir avec le confinement.

Ce qui est rigoureux, c'est *qu'en moyenne les résultats calculés en QCD perturbative corrigée par l'OPE sont égaux à la contribution hadronique*. Cela s'appelle la "dualité quarks-hadrons". Ce qui demande des hypothèses additionnelles et un certain "savoir faire", c'est de saturer la contribution hadronique par une seule résonance. La méthode des règles de somme de la QCD est beaucoup moins lourde que la QCD sur réseau. Son application à la phénoménologie hadronique est fondée sur la QCD (de ce point de vue, plus rigoureuse que le modèle des quarks) *plus* des hypothèses ad hoc (de ce point de vue, moins rigoureuse que la QCD sur réseau).

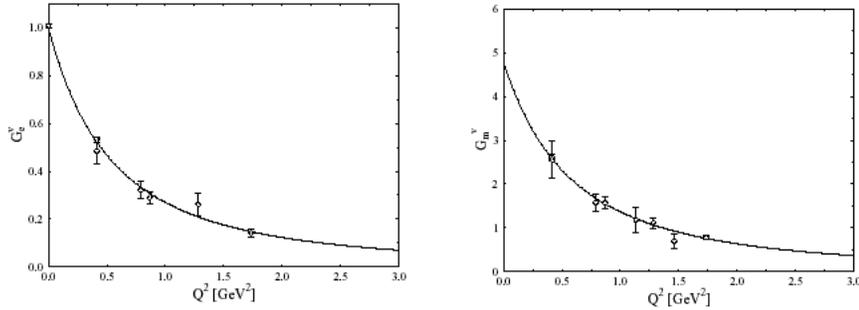


Figure 17: *Facteur de forme électrique et magnétique isovectoriel avec fit dipolaire calculé sur réseau [24].*

## 6 Phénoménologie en liaison avec les thèmes de l'école Joliot-Curie

Dans cette section nous allons présenter des résultats de simulations diverses sur réseau en liaison avec les thèmes traités au cours de l'école, c'est à dire essentiellement les propriétés des hadrons et celles des plasmas de quarks et de gluons. Nous n'expliquerons que peu comment ces résultats sont obtenus mais en discuterons brièvement les leçons physiques.

### 6.1 Facteurs de forme et distributions de partons

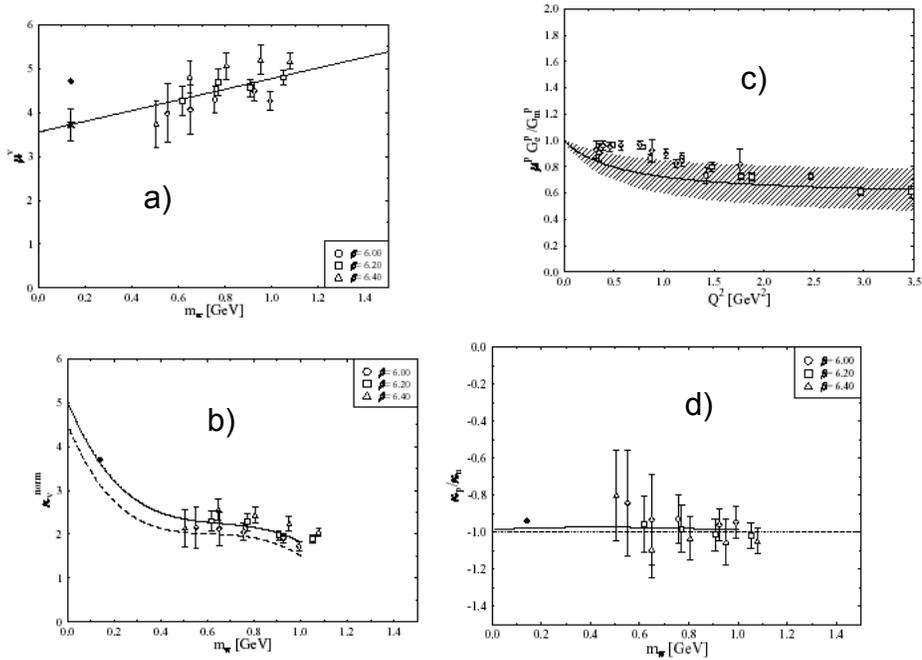


Figure 18: a) Moment magnétique vectoriel sur réseau avec extrapolation linéaire. b) Moment magnétique vectoriel anormal sur réseau, extrapolation selon la théorie chirale effective SSE. c) Rapport des facteurs de forme magnétiques et électriques sur réseau comparé au fit dipolaire extrapolé à la limite chirale. d) Rapport des moments magnétiques anormaux isoscalaires: réseau et SSE.



Figure 19: *Diagrammes illustrant les deux topologies différentes pour l’insertion d’un courant en QCD sur réseau. Ces diagrammes squelettes pour l’insertion connexe (gauche) et disconnexe (droite) sont habillés par un nombre arbitraire de gluons et de boucles de quarks.*

### 6.1.1 Facteurs de forme

La figure 17, provenant de la ref. [24], montre des facteurs de forme isovectoriels calculés en QCD sur réseau sans quarks dynamiques. Ce calcul a été fait avec des quarks sensiblement plus lourds que dans la nature, et un problème a été d’extrapoler le résultat vers des masses plus raisonnables. Pour cela les auteurs ont utilisé une théorie effective chirale nommée “small scale expansion (SSE)”.

### 6.1.2 Facteur de forme étrange du nucleon

La composante étrange du nucléon a été étudiée [25]. La contribution disconnexe est très difficile à estimer numériquement. Or la composante étrange est bien sûr disconnexe. Les auteurs ont contourné l’obstacle en calculant l’ensemble des moments magnétiques des baryons, fig. 20, et en en déduisant la contribution étrange sur le nucléon à partir d’une relation de ces différents moments magnétiques. De tels calculs devront bien évidemment être vérifiés par un calcul directe des diagrammes disconnexes.

### 6.1.3 Distribution de partons généralisés

Un nombre croissant d’études des fonctions de structures et des distribution de partons généralisées ont été faites sur réseau. A titre d’exemple nous présentons sur la figure 21 un résultat emprunté à la ref. [26]. Ces calculs se font à partir des moments qui sont reliés à des éléments de matrice de type suivant:

$$\langle N(p) | (\mathcal{O}_{sf})_{\mu_1 \dots \mu_s} = \frac{i^{s-2}}{s!} \bar{q}_f \gamma_{\{\mu_1} D_{\mu_2}^{\leftrightarrow} \cdot D_{\mu_s}^{\leftrightarrow} q_f | N(p') \rangle \quad (55)$$

La fig. 21 présente en fonction de la masse des quarks - ou de façon équivalente, de la masse carrée du pion - les grandeurs suivante: somme  $\Delta\Sigma$  du spin des

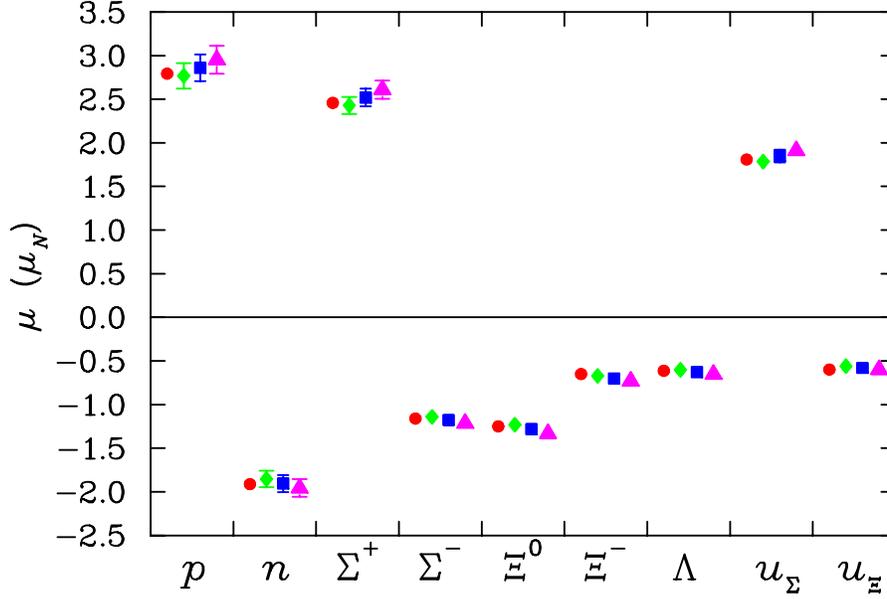


Figure 20: *La dépendance des moments magnétiques de l'octet des baryons dans les différentes méthodes d'ajustement de la maille du réseau. Les mesures expérimentales sont indiquées à gauche pour chaque baryon (cercles peints).*

quarks dans le nucléon, et moment angulaire  $L_q$  porté par les quarks. Le résultat de la simulation sur réseau pour  $\Delta\Sigma$  est deux fois plus grande que l'expérience, peut-être parce que la masse des quarks était trop grande dans ces simulations.

Pour conclure cette section, il semble que plusieurs phénomènes expérimentaux fort intéressants sont liés à la masse faible des quarks  $u$  et  $d$ . Les simulations actuelles, bien que prometteuses, ne décrivent pas certaines de ces expériences de façon satisfaisante, à moins d'être complétées par la théorie effective chirale qui théorise la limite de faible masse des quarks. La nouvelle génération d'ordinateurs sera confrontée à ces problèmes dans des conditions plus réalistes de masse et ce sera un enjeu passionnant de voir ce qui se passera.

## 6.2 La QCD à température et densité baryonique finies

Nous avons entendu un cours de principe sur les transitions de phases [27], et trois cours sur les collisions d'ions lourds passés, en cours ou à venir [28]. Nous allons d'abord rappeler en peu de mots comment on traite la théorie quantique

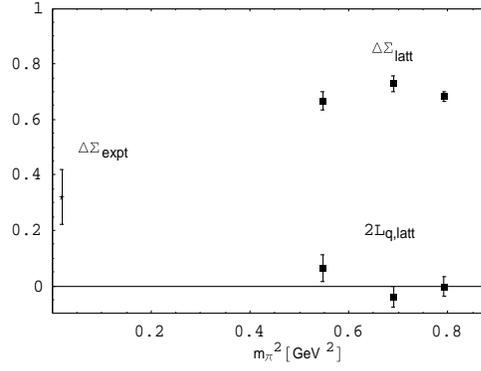


Figure 21: *Calcul réseau du spin total porté par les quarks, dans une normalisation où le spin du proton vaut 1, et contribution du moment orbital des quarks. A gauche la valeur expérimentale.*

des champs à température finie dans le formalisme du temps imaginaire, puis donner quelques résultats de simulations sur réseau.

### 6.2.1 La théorie des champs à T finie

La règle est simple comme l'a dit Claude Bernard [29], la théorie des champs à température finie  $T$  à l'équilibre se résout en résolvant la théorie en temps imaginaire (nous avons choisi ce formalisme tout du long) sur un hyper-cylindre de dimension infinie dans l'espace mais tel que la longueur temporelle (circonférence du cylindre) soit égale à  $1/T$ . Présentons une idée de la dérivation de ce très beau résultat dans le cas d'une théorie d'un champ scalaire  $\phi(x)$ . On définit une base d'états un peu particulière à partir de la valeur du champ:

$$\phi(\vec{x}, 0)|\phi_0 \rangle = \phi_0(\vec{x}) \quad \phi(\vec{x}, 0)|\phi_1 \rangle = \phi_1(\vec{x}) \quad (56)$$

L'opérateur d'évolution, en temps réel, entre l'état  $|\phi_0 \rangle$  au temps 0 et l'état  $|\phi_1 \rangle$  au temps  $t_1$  s'écrit :

$$\langle \phi_1 | e^{-iHt_1} | \phi_0 \rangle = N \int_{\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0(\vec{x})}^{\phi(\vec{x}, t_1) = \phi_1(\vec{x})} d\pi(x) d\phi(x) \exp \left\{ i \int_0^{t_1} dt \int d^3x i \pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right\} \quad (57)$$

Où  $H$  est le Hamiltonien. Passons au temps imaginaire et imposons  $\phi_1 = \phi_0$  (condition périodique), et intégrons sur  $\phi_1 = \phi_0$ , on obtient en choisissant  $t_1 = \beta = 1/T$

$$\begin{aligned} Tr[e^{-\beta H}] &= \sum_{\phi} \langle \phi | e^{-\beta H} | \phi \rangle \quad (58) \\ &= N \int d\pi(x) \int_{\text{periodic}} d\phi(x) \exp - \left\{ \int_0^{\beta} dt \int d^3x i \pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right\} \\ &= N \int_{\text{periodic}} d\phi(x) \exp - \left\{ \int_0^{\beta} dt \int d^3x i \mathcal{L}(\phi) \right\} \end{aligned}$$

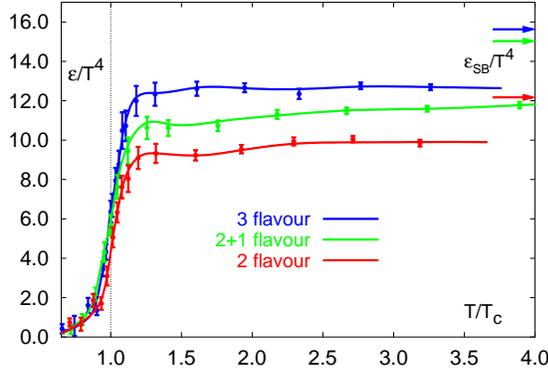


Figure 22: *Densité d'énergie*

La mécanique quantique à température finie nous enseigne que la valeur moyenne d'un opérateur dans un système à l'équilibre est donné par la distribution de Boltzman:

$$\langle O \rangle = \frac{\text{Tr}[e^{-\beta H} O]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \quad (59)$$

Donc nous voyons que *dans le formalisme à temps imaginaire il suffit de procéder comme avec un théorie de champs à température zéro, mais en remplaçant le volume quadridimensionnel infini par un cylindre de volume spatial infini et de circonférence  $\beta = 1/T$  dans la direction temporelle*. Cela se généralise aux théories de champs [29] et permet d'y donner une définition Lagrangienne - cf dernière ligne de l'eq. (58) - et invariante de jauge de la valeur moyenne des opérateurs invariants de jauge.

### 6.2.2 La QCD sur réseau à température finie

On comprend que la QCD sur réseau s'adapte parfaitement à la température finie. A température zéro on travaille - contraints et forcés - dans un espace-temps fini avec, en général, des conditions périodiques aux bords des quatre dimensions d'espace temps. La longueur du réseau dans les quatre directions est choisie assez grande pour minimiser les artefacts de volume fini.

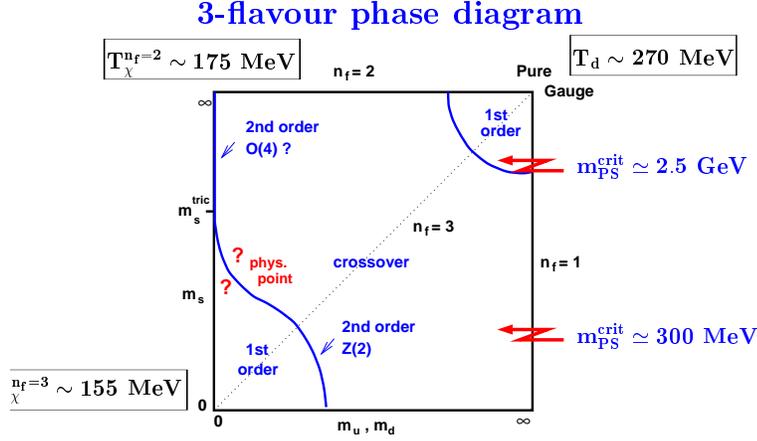


Figure 23: *Diagramme indiquant la nature de la transition de phase en fonction de la masse des quarks légers (supposés dégénérés) et de celle du quark étrange.*

A température finie, on applique la même règle pour les dimensions spatiales et la dimension temporelle est ajustée à  $\beta = 1/T$ . Cela n'a de sens que si les dimensions spatiales sont grandes par rapport à la dimension temporelle (en pratique on exige au moins un rapport 4).

A partir de là on peut calculer non seulement les fonctions de Green, mais les grandeurs thermodynamiques. Voyons en quelques unes à titre d'exemple. On définit  $Z(T, V)$  la fonction de partition (intégrale de chemin) en fonction de la température  $T$  et du volume spatial  $V$ . La densité d'énergie libre  $f$  et la pression  $p$  sont données par

$$f = -p = -\frac{T}{V} \ln Z(T, V) \quad (60)$$

La densité d'énergie,  $\epsilon$ , et la densité d'entropie,  $s$ , sont alors données par les relations

$$\frac{\epsilon - 3p}{T^4} = T \frac{d}{dT} \left( \frac{p}{T^4} \right), \quad \frac{s}{T^3} = \frac{\epsilon + p}{T^4} \quad (61)$$

et la vitesse du son par

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\epsilon} \quad (62)$$

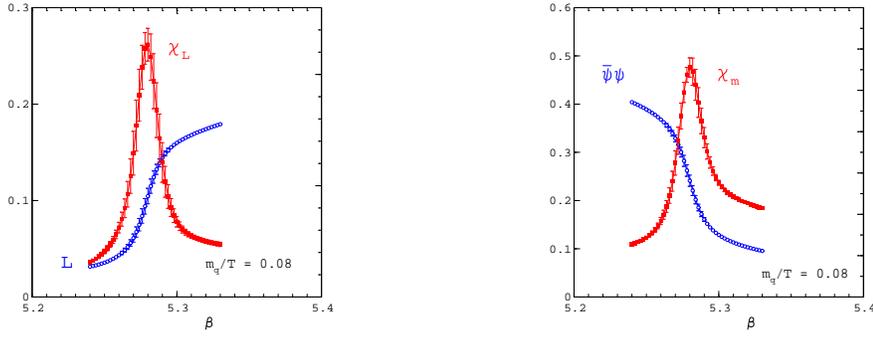


Figure 24: *Déconfinement et restauration de la symétrie chirale dans la QCD à deux saveurs: On peut voir  $\langle L \rangle$  (à gauche), qui est un paramètre d'ordre du déconfinement à la limite de la théorie sans quarks dynamiques, et  $\bar{q}q$ , (à droite) qui est le paramètre d'ordre de la brisure de la symétrie chirale à la limite chirale ( $m_q \rightarrow 0$ ). On peut aussi voir les susceptibilités correspondantes, qui forment un pic au moment de la transition de phase, en fonction du couplage  $\beta = 6/g^2$ . Il faut noter que le couplage contrôle la maille du réseau, et donc, à nombre de mailles constantes, la dimension temporelle, par conséquent la température.*

La figure 22 empruntés à [30] donne la densité d'énergie en fonction de la température pour trois saveurs dégénérées de quarks dynamiques (3), deux dégénérées (2), et deux dégénérées plus une de masse différente (2+1). On y voit clairement une transition entre la phase hadronique et la phase du plasma de quarks et de gluons à haute température.

Le diagramme de phase et la nature des transitions (1er ordre, 2ème ordre, cross-over) est une fonction compliquée de la masse des quarks, résumée avec ses interrogations dans la figure 23 empruntée à [30]. A la limite de masse infinie des quarks, on est dans le cas où les paramètres d'ordre du confinement existent. On peut montrer que la transition est du premier ordre. Au contraire, quand les masses tendent vers zéro, il existe un paramètre d'ordre de la symétrie chirale.

*Un des mystères les plus profonds de la QCD est que la transition de déconfinement et la transition de restauration de la symétrie chirale semblent survenir à la même température. Ce fait est bien illustré par la figure 24 elle aussi empruntée à [30]: La figure de gauche indique la transition de phase de déconfinement en mesurant la "boucle de Polyakov", paramètre d'ordre que nous n'avons pas introduit dans ce cours, la figure de droite indique la transition de phase de restauration de la symétrie chirale en mesurant le condensat  $\bar{q}q$ . La coïncidence des deux transitions est étonnante.*

### 6.2.3 La QCD sur réseau à densité baryonique finie

Les collisions d'ions lourds comportent une densité baryonique à l'endroit de la collision où on espère la formation d'un plasma de quarks et de gluons. Il faudrait donc calculer la QCD à densité baryonique non nulle, c'est à dire à potentiel chimique non nul pour le nombre baryonique [27]. Cela est très difficile

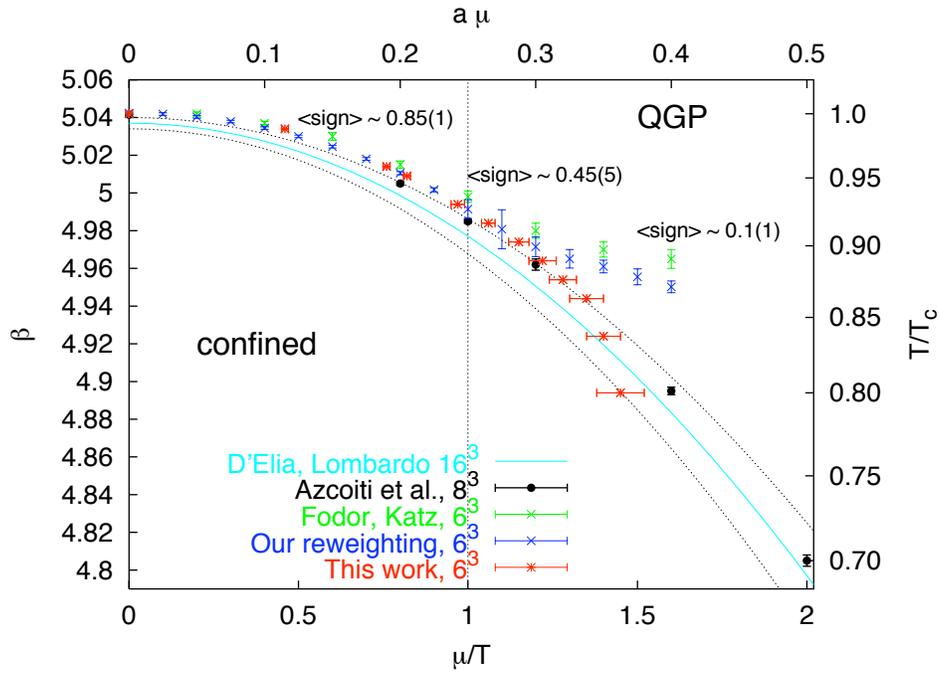


Figure 25: *Transition de phase en fonction du potentiel chimique, c'est à dire de la densité baryonique. L'axe vertical porte le couplage  $\beta = 6/g^2$  qui contrôle la maille du réseau, et donc, à nombre de mailles constantes, la dimension temporelle, par conséquent la température.*

à temps imaginaire, car le potentiel chimique introduit une phase complexe. Or le principe des calculs en QCD sur réseau c'est que l'intégrale de chemin intègre une fonction de probabilité positive. C'est la raison pour laquelle on passe au temps imaginaire: afin de transformer l'intégrale de chemin en une intégrale Boltzmanienne d'une fonction de probabilité positive (23). On évite ainsi les oscillations que donnerait la phase complexe de l'intégrale de chemin en temps réel (22). Avec un potentiel chimique on perd cet avantage, on doit intégrer une fonctionnelle de phase complexe variable. On ne sait pas comment faire.

Cependant, quand le potentiel chimique n'est pas trop éloigné de zéro, à température non nulle, différentes méthodes ont été proposées. Nous ne décrivons pas ces méthodes. Contentons-nous de montrer qu'elles convergent assez largement. La figure 25, empruntée à [31] montre la courbe de changement de phase, de déconfinement, en fonction du potentiel chimique. Les différentes méthodes y sont comparées. Il est intéressant de noter que les collisions d'ions lourds à RHIC et à LHC, au moment de la collision et dans les régions centrales, se trouvent au voisinage de la courbe ainsi calculée. Par contre la QCD sur réseau ne sait pas encore comment traiter le centre des étoiles à neutron, à température zéro et potentiel chimique non nul.

## 7 Conclusion

La QCD est sans doute la théorie des interactions forte. Ses prémisses sont extrêmement compactes, le nombre de ses paramètres très petit. C'est une véritable théorie dont on peut en principe déduire toutes les conséquences *ab initio*. C'est une théorie quantique des champs, c'est à dire qu'elle se situe dans un cadre théorique complexe mais bien très défini en principe. La particularité de la QCD est l'extraordinaire richesse de son champ d'application. Cette richesse est due à la féconde dualité entre son secteur perturbatif et non-perturbatif. Elle est due au confinement qui fait qu'à partir des quarks et des gluons elle décrit un cheptel immense de hadrons. Les méthodes théoriques essentielles dans les secteurs perturbatifs et non-perturbatifs sont respectivement les méthodes, complémentaires, des diagrammes de Feynman et de la QCD sur réseau. La QCD sur réseau demande des moyens de calcul très lourds et est limitée dans son champ d'application. Cependant des progrès rapides en étendent ce champ et en améliorent la précision. Bien sûr, une maîtrise analytique de la QCD dans son domaine non-perturbatif et une démonstration du confinement restent des objectifs théoriques très ambitieux, mais qu'il ne faut jamais perdre de vue.

*Ainsi les différents thèmes de cette école, les facteurs de forme et distributions partoniques des hadrons, les propriétés de la matière dans les conditions extrêmes des collisions d'ions lourds, les propriétés chirales des pions et kaons de basse énergie, et au delà de l'objet de cette école, les propriétés des hadrons soumis aux interactions faibles, y compris les secteurs charmés et de beauté, tous ces observables, toutes ces expériences si différentes, font partie du champ d'application d'une seule et même théorie, la chromodynamique quantique.*

## References

- [1] The 2004 Review of Particle Physics, [http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/contents\\_sports.html](http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/contents_sports.html), Plots of cross sections and related quantities (Rev.).
- [2] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367.
- [3] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25** (1967) 29.
- [4] Événements de l'expérience DELPHI <http://delphiwww.cern.ch/delfigs/events/z0ps/z0maxen.html>
- [5] "La QCD et son histoire : partons du bon pied", cours de Patrick Aurenche dans cette école.
- [6] Figure empruntée au site <http://www.lemaphys.univ-tours.fr/Materiaux/Supra/Types/TypesII.htm>.

- [7] S. Mandelstam, Phys. Rept. **23** (1976) 245.
- [8] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **190** (1981) 455.
- [9] N. Brambilla and A. Vairo, arXiv:hep-ph/9904330.
- [10] G. S. Bali, K. Schilling and C. Schlichter, Phys. Rev. D **51** (1995) 5165 [arXiv:hep-lat/9409005].
- [11] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts and Y. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
- [12] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976) [Erratum-ibid. D **18**, 2199 (1978)].
- [13] Shuryak E.V., Nucl. Phys. B **198** (1983) 83; Ilgenfritz E.-M., Müller-Preussker M., Nucl. Phys. B **184** (1981) 443.
- [14] D. Diakonov and V. Y. Petrov, Nucl. Phys. B **245**, 259 (1984).
- [15] “Symétrie chirale en QCD et théorie effective de basse énergie”, cours de Bachir Moussalam dans cette école.
- [16] Je remercie Feliciano de Soto pour cette figure.
- [17] V. Gadiyak, X. d. Ji and C. w. Jung, Phys. Rev. D **65** (2002) 094510 [arXiv:hep-lat/0112040].
- [18] “Structure des hadrons”, Jean-Marc le Goff, dans cette école.
- [19] S. Aoki *et al.* [JLQCD Collaboration], Phys. Rev. D **68** (2003) 054502 [arXiv:hep-lat/0212039].
- [20] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147** (1979) 385.
- [21] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147** (1979) 448.
- [22] K. G. Wilson, Phys. Rev. **179** (1969) 1499.
- [23] M. A. Shifman, arXiv:hep-ph/0009131.
- [24] M. Gockeler, T. R. Hemmert, R. Horsley, D. Pleiter, P. E. L. Rakow, A. Schafer and G. Schierholz [QCDSF Collaboration], Phys. Rev. D **71** (2005) 034508 [arXiv:hep-lat/0303019].
- [25] D. B. Leinweber, S. Boinepalli, A. W. Thomas, A. G. Williams, R. D. Young, J. B. Zhang and J. M. Zanotti, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **141** (2005) 287 [arXiv:hep-lat/0502004].

- [26] J. W. Negele, arXiv:hep-lat/0509100.
- [27] “Transitions de phase, de la limite thermodynamique aux systèmes finis”, Cours de Francesca Gulminelli dans cette école.
- [28] Cours dans cette école: “QGP : sondes prédites et étudiées au SPS” , Raphael Granier de Cassagnac ‘ne matière sous conditions extrêmes aux énergies du RHIC”, Christelle Roy “L’étude du QGP au LHC”, Pascal Dupieux.
- [29] C. W. Bernard, Phys. Rev. D **9** (1974) 3312.
- [30] F. Karsch, Lect. Notes Phys. **583** (2002) 209 [arXiv:hep-lat/0106019].
- [31] O. Philipsen, PoS **LAT2005** (2005) 016 [arXiv:hep-lat/0510077].