Equations différentielles

Maple permet d'obtenir des solutions d'équations différentielles exactes quand les équations différentielles sont intégrables.
L'instruction pour obtenir ce résultat est principalement l'instruction dsolve.
Cette instruction permet de résoudre à la fois des systèmes d'équations différentielles et aussi un ensemble d'équations algébriques et différentielles (voir plus bas la loi barométrique pour les batônnets durs).

Pour les équations différentielles que l'on intégre numériquement, il y a des instructions dans la bibliothèque DEtools qui s'appellent DEplot et DEplot3d qui résolvent et tracent en même temps, il y a aussi phaseportrait qui permet de tracer des portraits de phase très facilement.

I Hydrostatique

On considère un fluide isotherme en équilibre soumis à un champ de pesanteur uniforme. Ecrire l'équation de l'hydrostatique. On considère que le fluide est un gaz parfait c'est à dire que $P(z)=k_B T \rho(z)$ où $\rho(z)$ est le nombre de particules par unité de volume (si m est la masse d'une molécule de gaz, $m \rho(z)$ est alors la masse volumique). Résoudre simultanément l'ensemble des équations (hydrostatique et équation d'état). De combien de conditions aux limites a-t-on besoin? Tracer $\frac{\rho(z)}{\rho(0)}$ et $\frac{P(z)}{P(0)}$ en fonction de z pour $\rho(0)=.7,\ m\,g=1$ et $k_B T=1$.

```
> 
> restart;
```

```
> ehy:=diff(P(z),z)+m*g*rho(z);
```

$$ehy := \left(\frac{d}{dz} P(z)\right) + m\,g\,\rho(z)$$

```
> etat:=P(z)=k[B]*T*rho(z);
```

$$etat := P(z) = k_B\, T\, \rho(z)$$

```
> resh:=dsolve({ehy,etat,rho(0)=rho[0]},{rho(z),P(z)});
```

$$resh := \left\{ P(z) = \rho_0\, k_B\, T\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{m\,g\,z}{k_B\,T}\right)},\ \rho(z) = \rho_0\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{m\,g\,z}{k_B\,T}\right)} \right\}$$

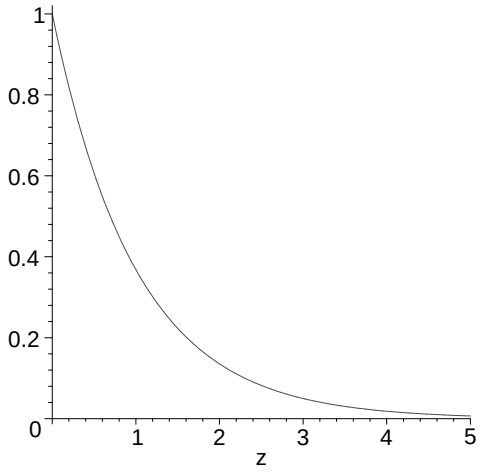
On a besoin d'une condition, on prend ici $\rho(0)=\rho_0$

```
> pp0:=subs(m=k[B]*T/g,eval(P(z),resh)/(rho[0]*k[B]*T));
```

$$pp0 := \mathbf{e}^{(-z)}$$

$\frac{\rho(x)}{\rho_0}$ donne exactement la meme fonction.

```
> plot(pp0,z=0..5);
```



On considère maintenant que les particules ont une taille finie. L' équation d'état exacte à une dimension est donnée par $P(z)=\frac{k_B T \rho(z)}{1-\rho(z)}$. Reprendre les questions précédentes.

```
> ehy:=diff(P(z),z)+m*g*rho(z);
```

$$ehy := \left(\frac{d}{dz}P(z)\right) + m\,g\,\rho(z)$$

```
> etat2:=P(z)=k[B]*T*rho(z)/(1-rho(z));
```

$$etat2 := P(z)=\frac{k_B T \rho(z)}{1-\rho(z)}$$

```
> resh2:=dsolve({ehy,etat2,rho(0)=rho[0]},{rho(z),P(z)});
```

$$resh2 := \{$$

$$\rho(z) = \frac{k_B T \,\mathrm{LambertW}\left(\frac{\mathbf{e}^{\left(-\frac{m g z}{k_B T} - \frac{-\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right) + \ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)\rho_0 + \rho_0}{-1+\rho_0}\right)}}{k_B T}\right)}{k_B T \,\mathrm{LambertW}\left(\frac{\mathbf{e}^{\left(-\frac{m g z}{k_B T} - \frac{-\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right) + \ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)\rho_0 + \rho_0}{-1+\rho_0}\right)}}{k_B T}\right) + k_B T},$$

$$P(z) = k_B T \,\mathrm{LambertW}\left(\frac{\mathbf{e}^{\left(-\frac{m g z}{k_B T} - \frac{-\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right) + \ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)\rho_0 + \rho_0}{-1+\rho_0}\right)}}{k_B T}\right)$$

```
> densite:=unapply(eval(rho(z),resh2),z);
```

densite :=

$$z \to \frac{k_B T \,\mathrm{LambertW}\left(\frac{\mathbf{e}^{\left(-\frac{m g z}{k_B T} - \frac{-\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)+\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)\rho_0+\rho_0}{-1+\rho_0}\right)}}{k_B T}\right)}{k_B T \,\mathrm{LambertW}\left(\frac{\mathbf{e}^{\left(-\frac{m g z}{k_B T} - \frac{-\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)+\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)\rho_0+\rho_0}{-1+\rho_0}\right)}}{k_B T}\right)+k_B T}$$

```
> pression:=unapply(eval(P(z),resh2),z);
```

$$pression := z \to k_B T \,\mathrm{LambertW}\left(\frac{\mathbf{e}^{\left(-\frac{m g z}{k_B T} - \frac{-\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)+\ln\left(-\frac{-1+\rho_0}{\rho_0 k_B T}\right)\rho_0+\rho_0}{-1+\rho_0}\right)}}{k_B T}\right)$$

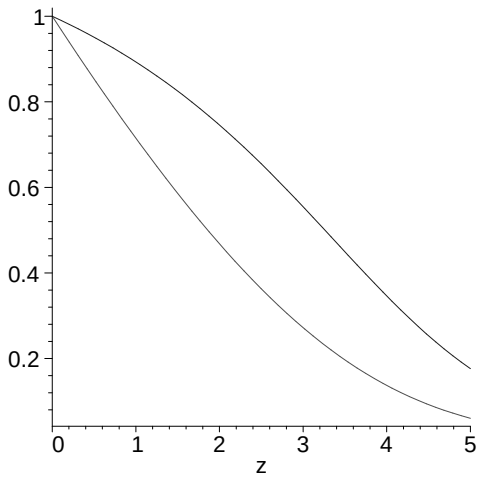
```
> rho2:=subs(m=1/g,k[B]=1/T,rho[0]=0.7,densite(z)/densite(0)
  );
```

$$\rho 2 := \mathrm{LambertW}(\mathbf{e}^{(-z - 0.9999999999\ln(0.4285714286) + 2.333333333)}) (\mathrm{LambertW}(\mathbf{e}^{(-0.9999999999\ln(0.4285714286) + 2.333333333)}) + 1) \Big/ ((\mathrm{LambertW}(\mathbf{e}^{(-z - 0.9999999999\ln(0.4285714286) + 2.333333333)}) + 1) \mathrm{LambertW}(\mathbf{e}^{(-0.9999999999\ln(0.4285714286) + 2.333333333)}))$$

```
> pp2:=subs(m=1/g,k[B]=1/T,rho[0]=0.7,pression(z)/pression(0
  ));
```

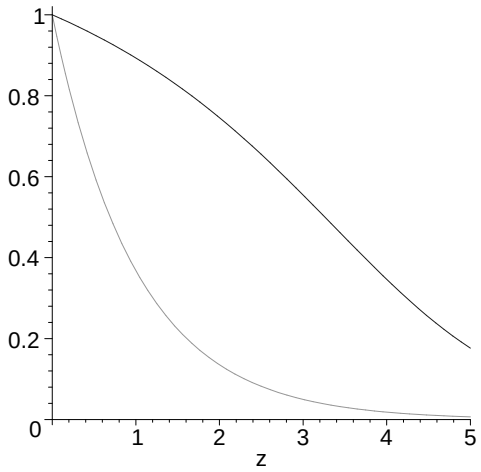
$$pp2 := \frac{\mathrm{LambertW}(\mathbf{e}^{(-z - 0.9999999999\ln(0.4285714286) + 2.333333333)})}{\mathrm{LambertW}(\mathbf{e}^{(-0.9999999999\ln(0.4285714286) + 2.333333333)})}$$

```
> plot([pp2,rho2],z=0..5,color=[red,blue]);
```

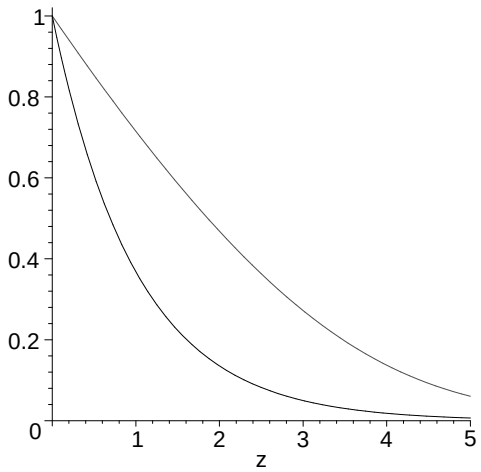


Tracer les courbes $\rho(z)$ pour le gaz parfait et le gaz réel sur un même graphe. De même pour P(z). Conclusion

```
> plot({pp0,rho2},z=0..5,color=[green,blue]);
```




```
> plot([pp0,pp2],z=0..5,color=[black,red]);
```



On observe que quand on tient compte du volume occupé par les particules, celles-ci ne

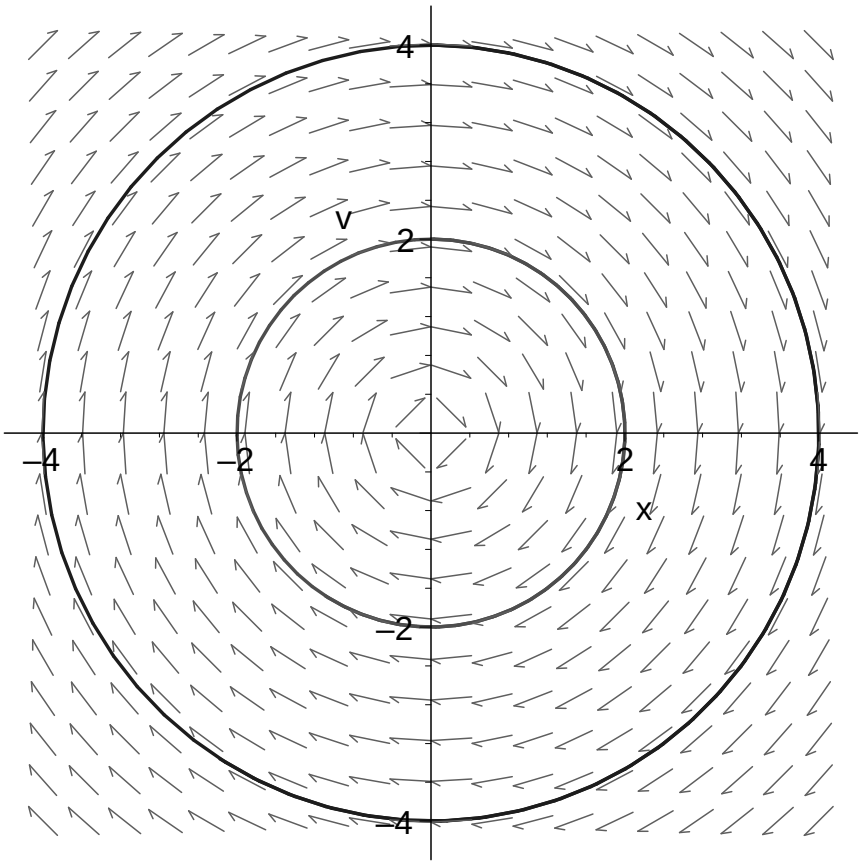
peuvent pas se compacter autant aux basses altitudes, et la densité - comme la pression -, est moins piquée au voisinage de z=0. Les particules se répartissent mieux. On pouvait s'y attendre!

II L'oscillateur harmonique

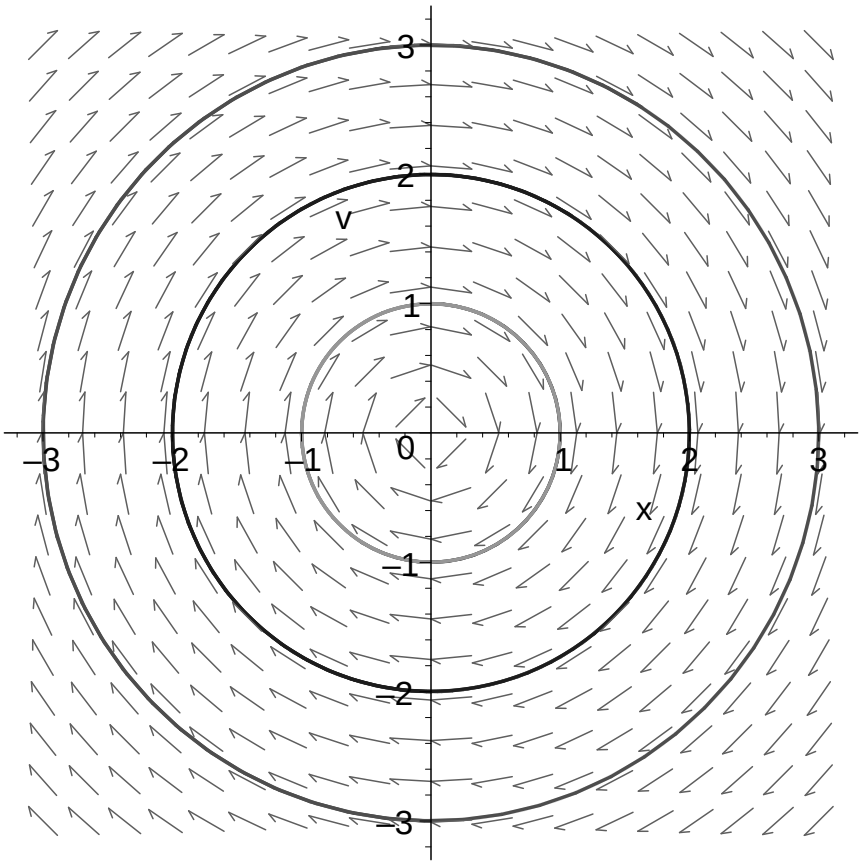
On considère une masse m assujettie à se déplacer le long d'une droite horizontale et soumise à la force de rappel d'un ressort -kx, où k est la constante de raideur et x la position de la particule sur l'axe Ox. L'équation du mouvement est $m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -kx$.
et la solution est une fonction sinusoïdale du temps. Ce mouvement peut être représenté dans l'espace des phases, c'est-à-dire dans ce cas, un plan dont les axes sont donnés par la position et la vitesse de la particule.
Dans un tel espace, un mouvement périodique est caractérisé par une trajectoire fermée. En choisissant une unité de temps appropriée, on peut se ramener à une équation où le rapport k/m est égal à 1.

Pour tracer les trajectoires dans l'espace des phases, on charge la bibliothèque with(DEtools): puis, on utilise l'ordre phaseportrait. Par exemple, l'instruction
phaseportrait
([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)],[x(t),v(t)],t=0..10,[[x(0)=0,v(0)=2],[x(0)=0,v(0)=4]],stepsize=.1);
trace dans l'espace des phases deux trajectoires pour un intervalle de temps compris entre 0 et 10, avec les conditions initiales suivantes : x(0)=0, v(0)=2 pour la première trajectoire et v(0)=4 pour la seconde.
Tracer les trajectoires pour une suite de conditions initiales x(0)=0 et v(0)=i pour i allant de -3 à +3. Que remarque-t-on ? Quelle est la propriété physique à l'origine de ce résultat ?

```
> with(DEtools):
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)],[x(t),v(t)],t=0
  ..10,[[x(0)=0,v(0)=2],[x(0)=0,v(0)=4]],stepsize=.1,linecol
  or=[red,blue]);
```




```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)],[x(t),v(t)],t=0
  ..10,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-3..3)],stepsize=.1,linecolor=
  [red,blue,green,black,brown,yellow,orange]);
```



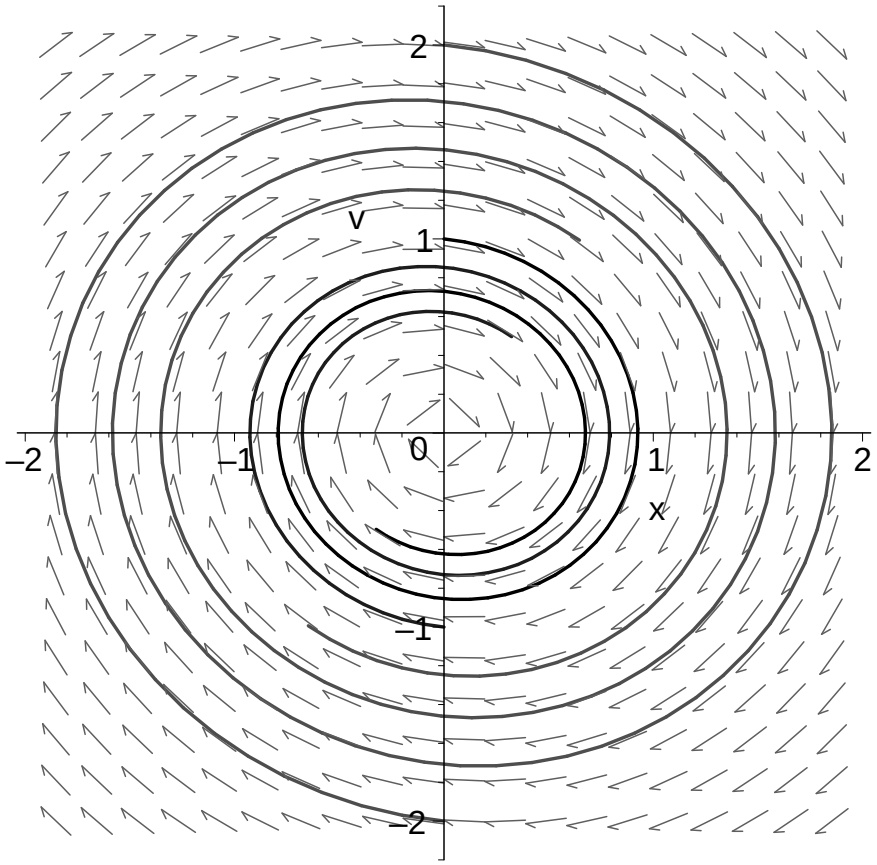
On a 3 courbes fermées. Equation invariante par renversement du temps, donc les trajectoires dans l'espace des phases sont identiques pour v0 ou -v0

On considère dans un second temps que l'oscillateur est soumis à une force supplémentaire de frottement fluide. L'équation du mouvement est alors

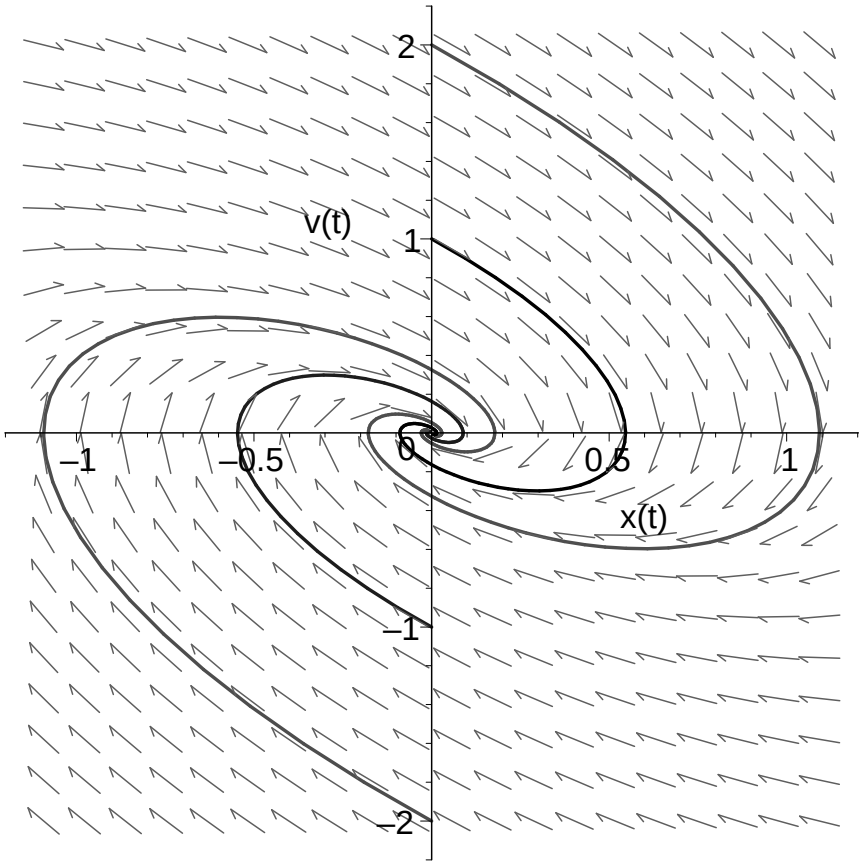
$$m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = -kx - \frac{a\,dx}{dt}$$

.Tracer dans l'espace des phases les trajectoires précédentes pour des valeurs a/m valant 0.1, 1, 2, 4 et pour une suite de conditions initiales x(0)=0 et v(0)=i pour i allant de -2 à +2. . Que note-t-on sur le nombre et la forme de celles-ci ? Pour quelle valeur de a/m observe-t-on un changement de comportement ?

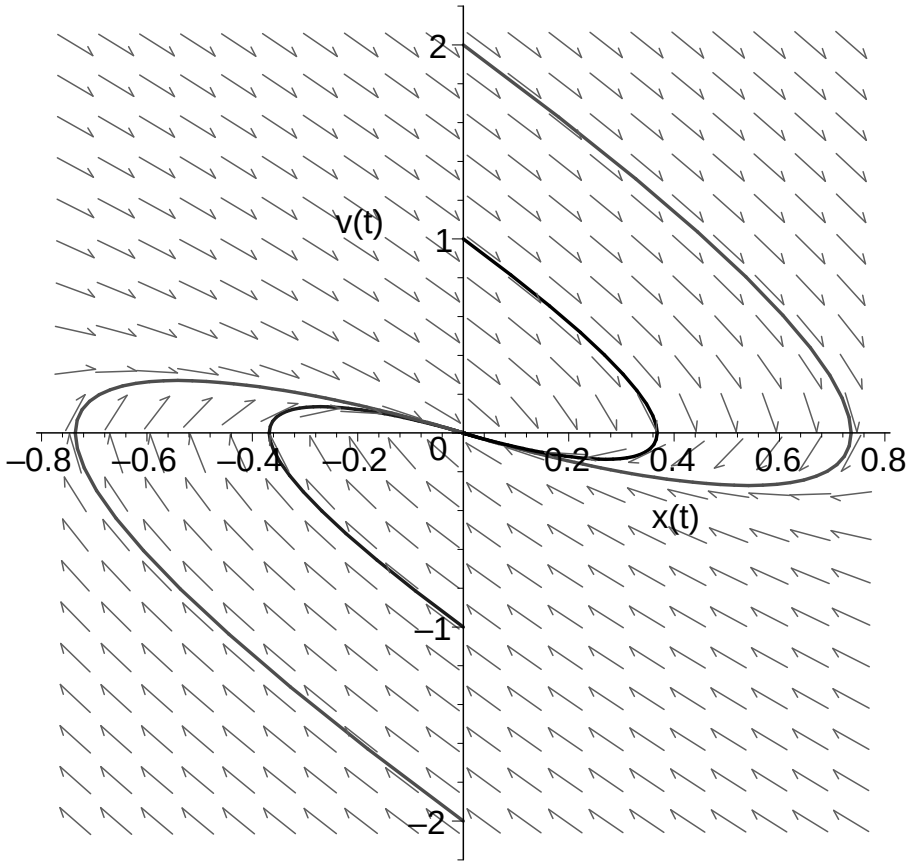
```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-0.1*v(t)-x(t)],[x(t
  ),v(t)],t=0..10,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],stepsize=
  .1,linecolor=[red,blue,green,black,brown]);
```



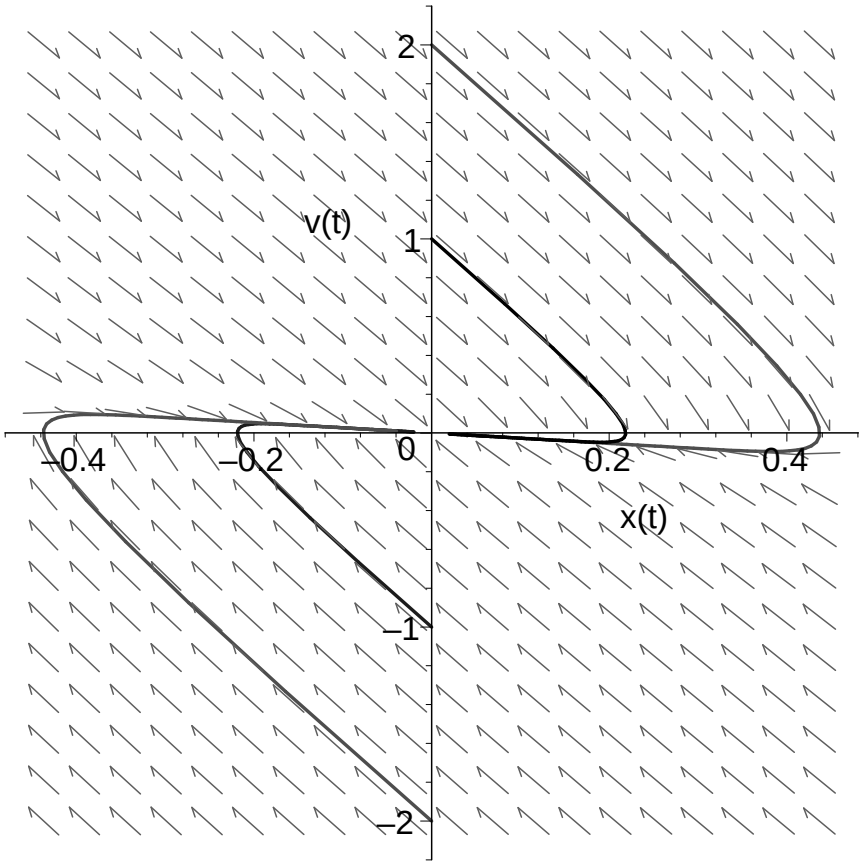

```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-v(t)-x(t)],[x(t),v(
  t)],t=0..10,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],scene=[x(t),v
  (t)],stepsize=.1,linecolor=[red,blue,green,black,brown])
  ;
```




```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-2*v(t)-x(t)],[x(t),
  v(t)],t=0..10,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],scene=[x(t)
  ,v(t)],stepsize=.1,linecolor=[red,blue,green,black,brown
  ]);
```




```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-4*v(t)-x(t)],[x(t),
  v(t)],t=0..10,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],scene=[x(t)
  ,v(t)],stepsize=.1,linecolor=[red,blue,green,black,brown
  ]);
```



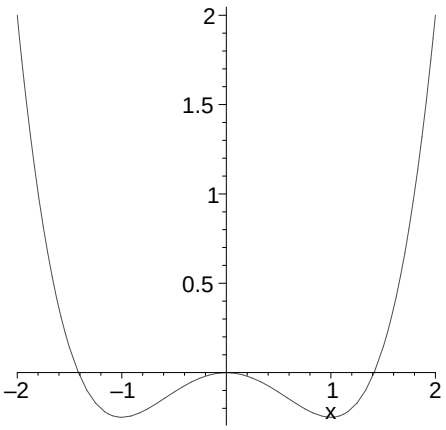
Le système est dissipatif. Le point (0,0) est un attracteur pour l'ensemble des trajectoires. L'invariance par renversement du temps est brisée, les trajectoires avec -v0 et +v0 comme condition initiales ne sont plus superposables. On observe trois régimes psedo-périodique (la trajectoire s'enroule autour du centre), le régime critique (a=2), les trajectoires situées à gauche ou à droite de l'axe y=0 retournent à l'origine sans franchir cet axe. Pour a>2, le régime est apériodique avec des caractéristiques visuelles assez identiques au régime critique.

III L'oscillateur anharmonique

Particule dans un double puits de potentiel

On considère une masse m assujettie à se déplacer le long d'une courbe donnée par l'équation z=-x^2/2+x^4/4.

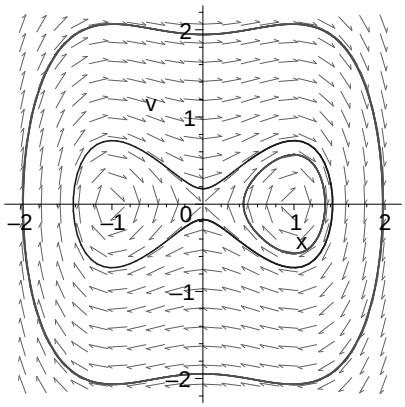
```
> plot(-x^2/2+x^4/4,x=-2..2);
```



On peut montrer que le mouvement d'une particule soumise à son poids est donné par l'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} = x - x^3$.

Tracer les trajectoires dans l'espace des phases en utilisant des conditions initiales (x(0)=0.5, v(0)=0.2), (x(0)=0.5, v(0)=0.5) et (x(0)=0.5, v(0) =2). Analyser le résultat obtenu. Déterminer la valeur critique de la vitesse pour qu'une particule partant de x=1 effectue un mouvement vibratoire dans l'ensemble des deux puits. On prendra g=1.

```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=x(t)-x(t)^3],[x(t),v
  (t)],t=0..20,[[x(0)=0.5,v(0)=0.2],[x(0)=0.5,v(0)=0.5],[x
  (0)=0.5,v(0)=2]],linecolor=[red,blue,brown],stepsize=.1)
  ;
```



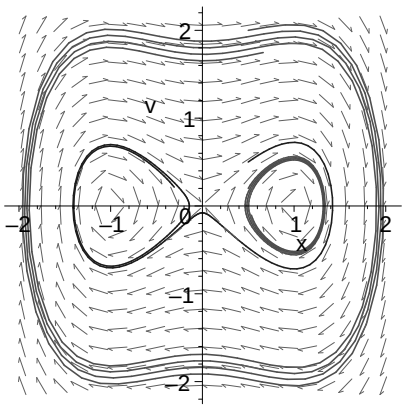
On voit que si la vitesse initiale est trop faible la trajectoire reste bornée autour d'un minimum. Les oscillations peuvent être fortement anharmoniques

Comme le mouvement s'effectue sans frottements, l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2} m \, \mathrm{v}(x)^2 + m \, g \, \mathrm{z}(x)$ doit etre conservée. Le seuil pour que la particule passe d'un creux à l'autre correspond au cas où la vitesse de la particule s'annule sur le col en x=0. L'énergie E_m vaut dans ce cas zéro. Alors, en x=1, on a $z = -\frac{1}{4}$ et donc

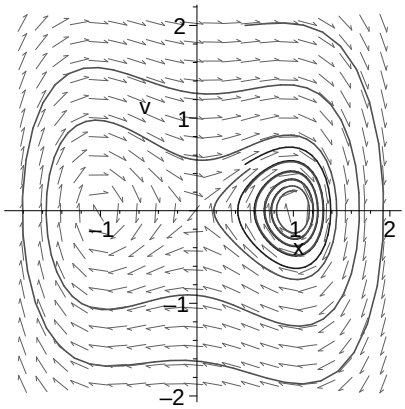
$$v(1)=\sqrt{\frac{g}{2}}.$$

On considère dans un second temps que l'oscillateur est soumis à une force supplémentaire de frottement fluide de même nature que pour l'oscillateur. Tracer les trajectoires dans l'espace de phase pour différentes valeurs du coefficient de frottement fluide.

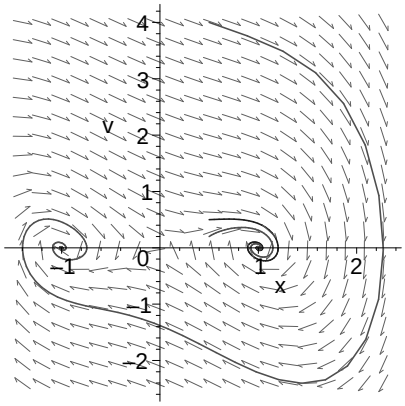
```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=x(t)-x(t)^3-0.01*v(t)],[x(t),v(t)],t=0..20,[[x(0)=0.5,v(0)=0.2],[x(0)=0.5,v(0)=0.5],[x(0)=0.5,v(0)=2]],linecolor=[red,blue,brown],stepsize=.1);
```




```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=x(t)-x(t)^3-0.1*v(t)],[x(t),v(t)],t=0..20,[[x(0)=0.5,v(0)=0.2],[x(0)=0.5,v(0)=0.5],[x(0)=0.5,v(0)=2]],linecolor=[red,blue,brown],stepsize=.1);
```




```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=x(t)-x(t)^3-0.7*v(t)],[x(t),v(t)],t=0..20,[[x(0)=0.5,v(0)=0.2],[x(0)=0.5,v(0)=0.5],[x(0)=0.5,v(0)=4]],linecolor=[red,blue,brown],stepsize=.1);
```

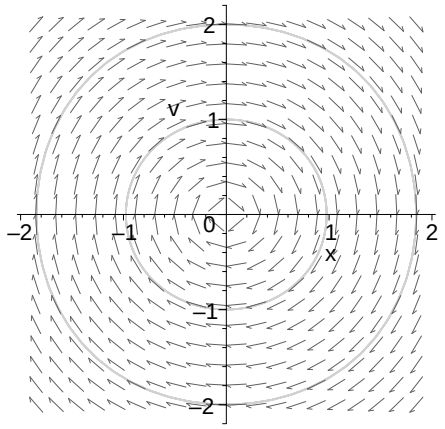


On considère une masse m assujettie à se déplacer le long d'une droite horizontale et soumise à la force de rappel d'un ressort -kx-gx3, où g est la constante anharmonique. L'équation du mouvement est $m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -kx - gx^3$.

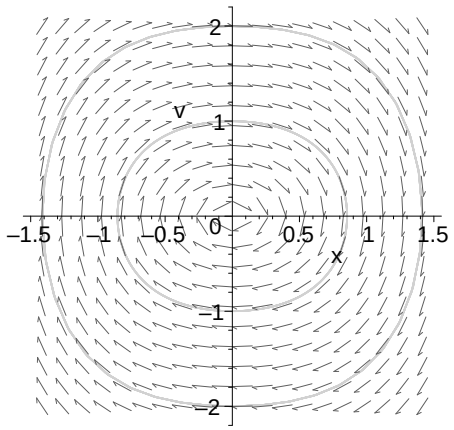
Tracer dans l'espace des phases les trajectoires précédentes pour des valeurs g/m valant 0.1 et 1.(On garde k/m=1) Que note-t-on sur le nombre et la forme de celles-ci ?

On considère dans un second temps que l'oscillateur est soumis à une force supplémentaire de frottement fluide de même nature que pour l'oscillateur. Tracer les trajectoires dans l'espace de phase pour les mêmes valeurs de a/m de la partie précédente en prenant g/m =1.

```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)-0.1*x(t)^3],[x(t),v(t)],t=0..20,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],stepsize=.1);
```

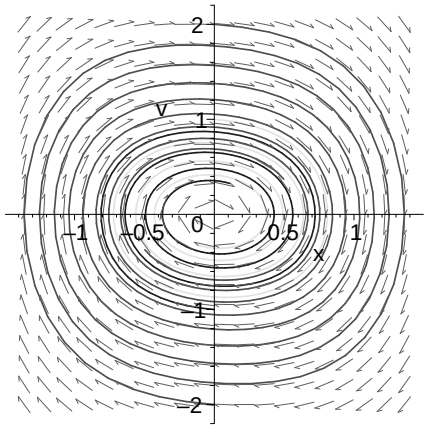



```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)-x(t)^3],[x(t),v(t)],t=0..20,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],stepsize=.1);
```

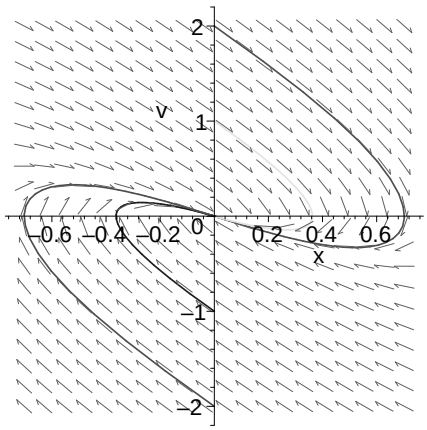


Mouvement conservatif. Les trajectoires sont fermées et les trajectoires avec les conditions initiales -v0 et +v0 sont superposables. L'absence d'isochrononisme donnent des trajectoires étirées dont la direction des vitesses. Ces trajectoires redeviennent de plus en plus circulaires pour une energie initiale faible (quasi-isochronisme).

```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)-x(t)^3-0.1*v(t)]
  ,[x(t),v(t)],t=0..20,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],stepsi
  ze=.1,linecolor=[red,blue,black,yellow,brown]);
```




```
> phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)-x(t)^3-2*v(t)],[
  x(t),v(t)],t=0..20,[seq([x(0)=0,v(0)=i],i=-2..2)],linecolo
  r=[red,blue,black,yellow,brown],stepsize=.1);
```



Les trajectoires convergeant vers l'orgine, l'analyse précédente sur l'oscillateur harmonique amortie est asymptotiquement celle de l'oscillateur anharmonique.

IV Système proie-prédateur

On considère l'écosystème suivant : la population est constituée de proies (notées X), de prédateurs (notés Y), de nourriture (notée A). Le taux de reproduction des proies est fixé par la quantité de nourriture, le taux de reproduction des prédateurs est fixé par le nombre de proies, et les prédateurs meurent naturellement avec un taux fixé. On suppose que la nourriture est en quantité constante et égale à a. Ce système est représenté par les équations suivantes

$$\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,(k_1\ a - k_2\ \mathrm{y}(t))$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(t)\,(k_3\ \mathrm{x}(t) - k_4)$$

En utilisant l'instruction DEplot on tracera les solutions de ces équations en prenant k1=k2=a=1 avec k3=k4=1 ou 0.3, puis en prenant k1=k2=k3=k4=1, a=2. (Lire attentivement cette page d'aide). On prendra deux conditions initiales x(0)=0.2 et y(0)=1.2 et aussi x(0)=1 et y(0)=0.7.

```
> eqc1:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),diff(y(t),t)=y(t)*(x(t)-1
  );
```

$$eqc1 := \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,(1 - \mathrm{y}(t)),\ \frac{d}{dt}\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(t)\,(\mathrm{x}(t) - 1)$$

```
> eqc2:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),diff(y(t),t)=0.3*y(t)*(x(
  t)-1);
```

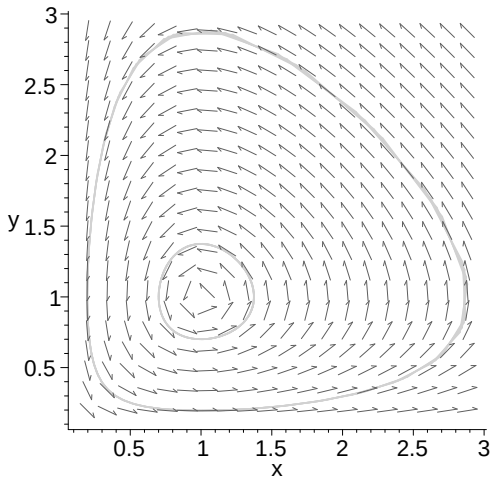
$$eqc2 := \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,(1 - \mathrm{y}(t)),\ \frac{d}{dt}\mathrm{y}(t) = 0.3\ \mathrm{y}(t)\,(\mathrm{x}(t) - 1)$$

```
> eqc3:=diff(x(t),t)=x(t)*(2-y(t)),diff(y(t),t)=y(t)*(x(t)-1
  );
```

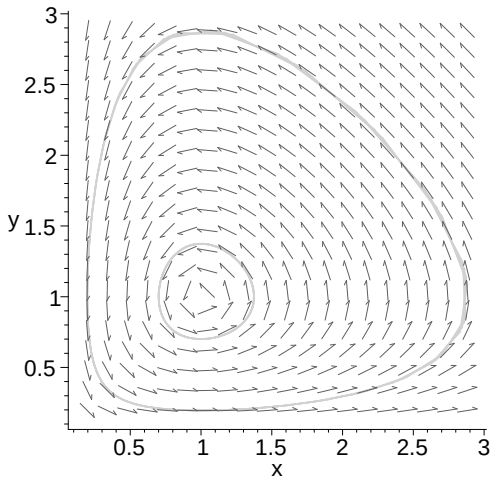
$$eqc3 := \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t)\,(2 - \mathrm{y}(t)),\ \frac{d}{dt}\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(t)\,(\mathrm{x}(t) - 1)$$

```
> with(DEtools):
> DEplot({eqc1},[x(t),y(t)],t=0..30,[[x(0)=0.2,y(0)=1.2],[x(
```

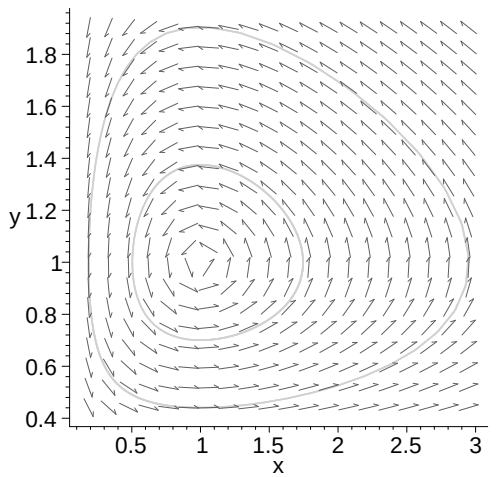
```
0)=1,y(0)=.7]],stepsize=.2);
```



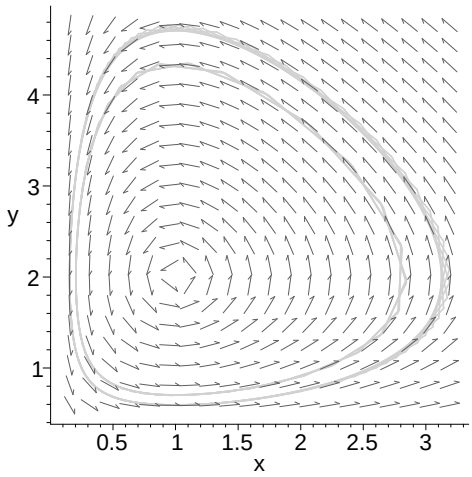

```
> DEplot({eqc1},[x(t),y(t)],t=0..30,[[x(0)=0.2,y(0)=1.2],[x(
0)=1,y(0)=.7]],stepsize=.2,method=rkf45);
```




```
> DEplot({eqc2},[x(t),y(t)],t=0..30,[[x(0)=0.2,y(0)=1.2],[x(
0)=1,y(0)=.7]],stepsize=.2,method=rkf45);
```




```
> DEplot({eqc3},[x(t),y(t)],t=0..30,[[x(0)=0.2,y(0)=1.2],[x(
0)=1,y(0)=.7]],stepsize=.2,method=rkf45);
```



V Attracteur de Lorenz

Lorenz, un météorologiste a proposé en 1963 un modèle simplifié de convection dans l'atmosphère terrestre. Ce modèle est représenté par le système d'équations non-linéaires couplées suivant
dx / dt = a (y - x)

dy / dt = x (b - z) - y

dz / dt = xy - c z
Le premier choix de paramètres est a = 10, b = 28, c = 8 / 3. Le second choix est a = 28, b = 46.92, c = 4. "a"représente le nombre de Prandtl et "b" celui de Rayleigh.
Pour résoudre ces systèmes, on utilisera l'instruction DEplot3d avec les options suivantes:
DEplot3d({sys},[x(t),y(t),z(t)],t=0..10,
[[x(0)=-0.1,y(0)=10,z(0)=10]],scene=[x(t),y(t),z(t)],
stepsize=.02,linecolor=t);
sys représente le système des équations différentielles que l'on a résoudre. Commenter les résultats.

```
> eq1:=D(x)(t)=a*(y(t)-x(t));
```

$$eq1 := \mathrm{D}(x)(t) = a\,(\mathrm{y}(t) - \mathrm{x}(t))$$

```
> eq2:=D(y)(t)=x(t)*(b-z(t))-y(t);
```

$$eq2 := \mathrm{D}(y)(t) = \mathrm{x}(t)\,(b - \mathrm{z}(t)) - \mathrm{y}(t)$$

```
> eq3:=D(z)(t)=x(t)*y(t)-c*z(t);
```

$$eq3 := \mathrm{D}(z)(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t) - c\,\mathrm{z}(t)$$

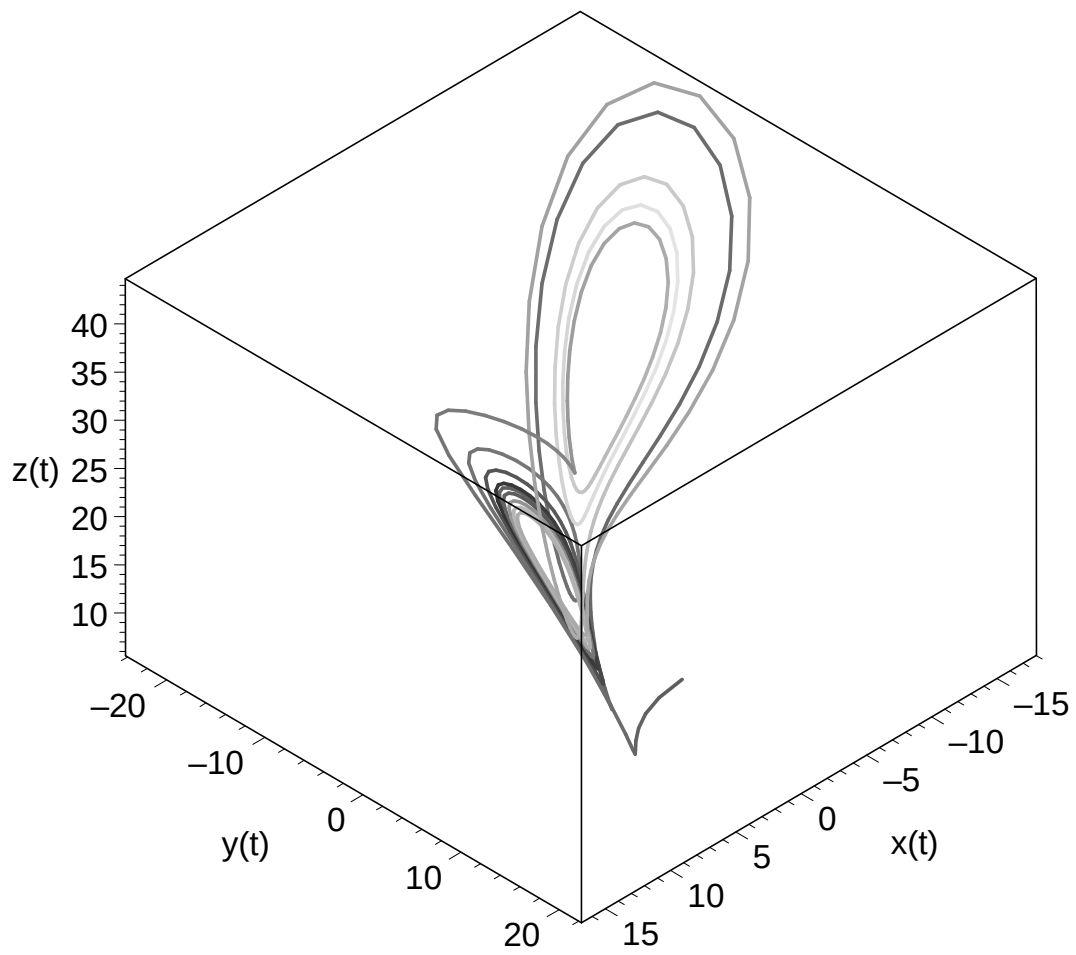
```
> sys1:=subs(a=10,eq1),subs(b=28,eq2),subs(c=8/3,eq3);
```

$$sys1 :=$$

$$\mathrm{D}(x)(t) = 10\,\mathrm{y}(t) - 10\,\mathrm{x}(t),\ \mathrm{D}(y)(t) = \mathrm{x}(t)\,(28 - \mathrm{z}(t)) - \mathrm{y}(t),\ \mathrm{D}(z)(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t) - \frac{8}{3}\,\mathrm{z}(t)$$

```
> with(DEtools):
```

```
> DEplot3d({sys1},[x(t),y(t),z(t)],t=0..10,
  [[x(0)=-0.1,y(0)=10,z(0)=10]],scene=[x(t),y(t),z(t)],
  stepsize=.02,linecolor=t);
```

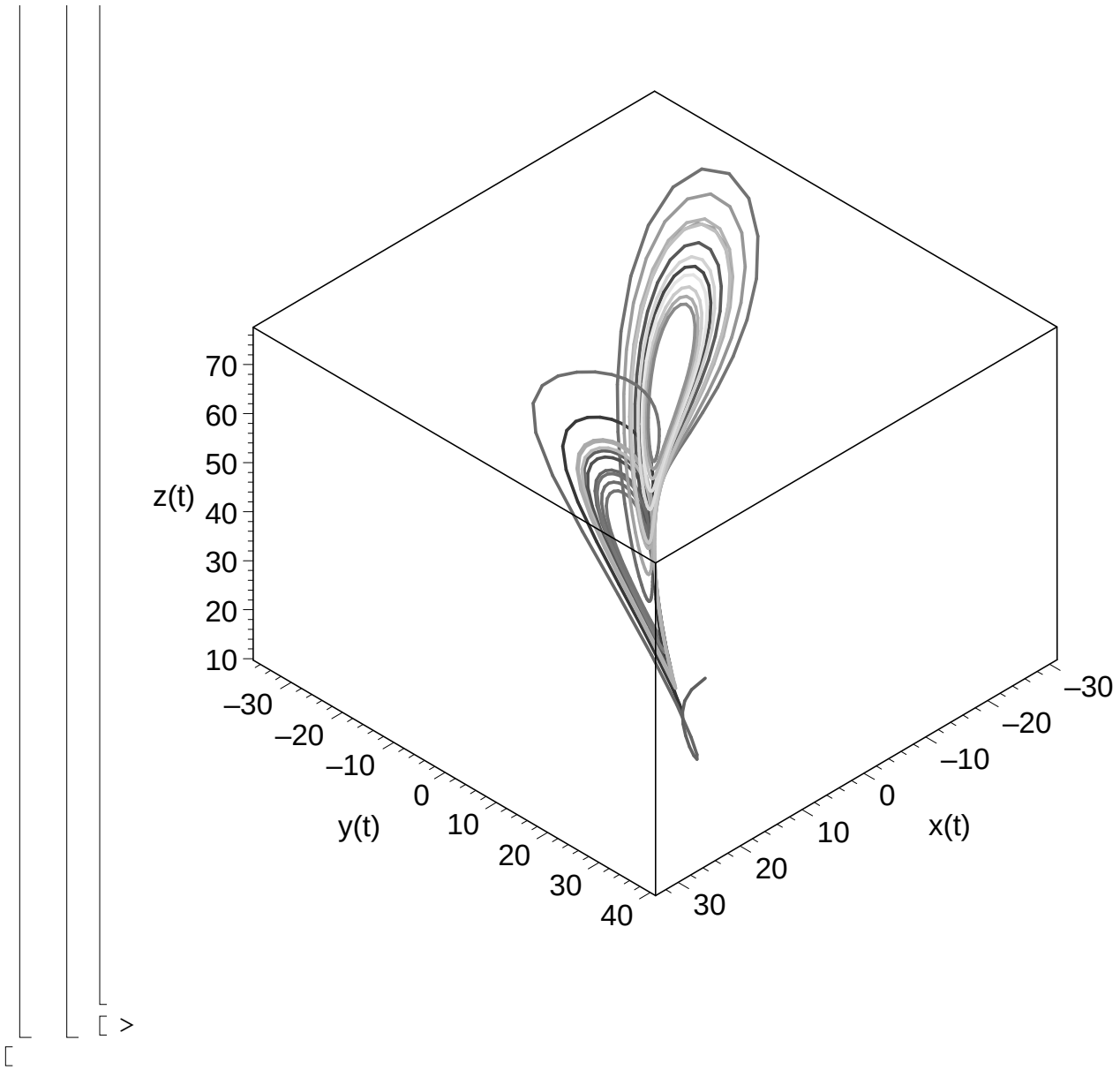



```
> sys2:=subs(a=28,eq1),subs(b=46.92,eq2),subs(c=4,eq3);
```

sys2 :=

$$\mathrm{D}(x)(t) = 28\,\mathrm{y}(t) - 28\,\mathrm{x}(t),\ \mathrm{D}(y)(t) = \mathrm{x}(t)\,(46.92 - \mathrm{z}(t)) - \mathrm{y}(t),\ \mathrm{D}(z)(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t) - 4\,\mathrm{z}(t)$$

```
> DEplot3d({sys2},[x(t),y(t),z(t)],t=0..10,
  [[x(0)=-0.1,y(0)=10,z(0)=10]],scene=[x(t),y(t),z(t)],
  stepsize=.01,linecolor=t);
```


z(t)
70
60
50
40
30
20
10
–30
–20
–10
0
10
20
30
40
y(t)
–30
–20
–10
0
10
20
30
x(t)

[>

[