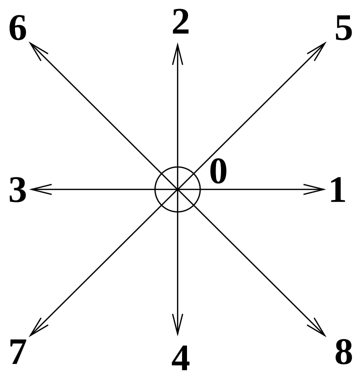
Cours de DEA – 1998-1999
Fluides discrets – gaz sur réseau
Projet informatique

Modèle de Boltzmann BGK à 9 vitesses
Ecoulement de Poiseuille

1 Modèle BGK à 9 vitesses sur réseau carré, avec gravité.



Les vitesses $\{C_i\}_{i=0\cdots 8}$ ont comme module

$$|\mathbf{C}_i| = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ c & \text{si } i = 1,2,3,4 \\ c\sqrt{2} & \text{si } i = 5,6,7,8 \end{cases}$$

On prendra $c = 1$.
La probabilité d'occuper un état de vitesse i est donnée par

$$0 \le N_i(\mathbf{x}, t) \le 1.$$

Le système évolue par alternance d'étapes de collision et de propagation. On ajoute une force de gravité $\rho G < 0$. Tout cela se traduit par l'équation d'évolution suivante

$$N_i(\mathbf{x} + \mathbf{C}_i, t+1) = N_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau}\left[N_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - N_i(\mathbf{x}, t)\right] + \frac{w_i}{c_s^2}\left(1 - \frac{1}{2\tau}\right)\rho G C_{iy}.$$

La distribution d'équilibre N_i^{eq} est donnée par

$$N_i^{eq} = w_i \left\{ \rho + \frac{(\mathbf{C}_i.\mathbf{j})}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{C}_i.\mathbf{j})^2}{2\rho c_s^4} - \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho c_s^2} \right\} \tag{1}$$

avec

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & \text{si } i = 0 \\ 1/9 & \text{si } i = 1,2,3,4 \\ 1/36 & \text{si } i = 5,6,7,8 \end{cases}$$

et $c_s = c/\sqrt{3}$. Les valeurs de ρ et $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ utilisées pour calculer N_i^{eq} sont celles que l'on mesure en chaque site juste avant la collision. Lorsqu'on ajoute une force en volume (ici la gravité), si on veut que le fluide obéisse aux bonnes équations, il faut définir

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = \frac{\rho}{2}\mathbf{G} + \sum_i N_i \mathbf{C}_i. \tag{2}$$

On a toujours $\rho = \sum_i N_i$ où ρ est la densité par site.
Pour être cohérent avec la formule (2), il faut initialiser le réseau de telle façon que

$$\sum_i N_i \mathbf{C}_i = \rho \mathbf{v}_{initial} - \frac{\rho}{2}\mathbf{G}.$$

Pour que le schéma soit stable, il faut que $0 < 1/\tau < 2$.
Pour les écoulements faiblement compressibles, on peut remplacer les ρ apparaissant au dénominateur de la formule (1) par la densité moyenne initiale ρ_0. Cela permet d'avoir un schéma plus stable et plus rapide (on peut remplacer la division par un produit).
Pour faciliter la programmation, il est conseillé de définir un tableau un peu plus large que celui qu'on veut simuler, i.e. d'ajouter une rangée de sites tout autour du maillage.
On travaillera en double précision.

2 Condition aux limites sur une paroi solide

Si $\mathbf{x}$ est un site solide, alors l'équation d'évolution devient

$$N_i(\mathbf{x} + \mathbf{C}_i, t + 1) = -N_i(\mathbf{x}, t)$$

3 Ecoulement de Poiseuille

On prendra un maillage ayant des parois solides à droite et à gauche, et des conditions aux limites périodiques dans la direction verticale y. On commence avec le fluide au repos. On attend que le régime stationnaire soit atteint avant de faire les mesures. Il faut choisir une valeur pour G suffisamment faible pour ne pas avoir de densités négatives.

- Tracer le profil de vitesse en fonction de x.
- En réalisant un fit par une parabole, localiser les parois solides effectives (la vitesse ne s'annule pas nécessairement exactement sur les sites solides). On répetera l'opération pour quelques tailles de systèmes (faire varier N_x entre 5 et 200).
- On déduira aussi de ce fit la valeur de la viscosité ν, pour des valeurs de $1/\tau = 0.5$, 1.0, et 1.5, et pour les diverses tailles de systèmes. Il faudra pour cela calculer analytiquement le profil de vitesse auquel on s'attend pour un écoulement de Poiseuille dans un champ de gravité.

Pour tout renseignement complémentaire, envoyer un mail à appert@physique.ens.fr