Focalisation non-linéaire d'une onde acoustique sphérique

C. Appert, X. Chavanne, S. Balibar, D. d'Humières, Ch. Tenaud[(1)]
Laboratoire de Physique Statistique
Ecole Normale Supérieure
24 rue Lhomond 75231 Paris Cedex 05
(1) LIMSI, Bât. 508, Université de Paris-Sud
appert@lps.ens.fr, balibar@lps.ens.fr,
chavanne@lps.ens.fr, dominiq@lps.ens.fr

Résumé

En vue d'interpréter des expériences de cavitation réalisées par H. Lambaré et al [2], puis F. Caupin et al [3], on voudrait connaitre la pression au point focal d'une céramique piézo-électrique hémisphérique plongée dans un liquide dont la compressibilité varie fortement avec la pression, tel que l'hélium 4 liquide. La focalisation de l'onde met en jeu des effets non-linéaires, dont notre étude numérique et analytique [1] montre qu'ils sont très importants. Cette étude a été réalisée en géométrie sphérique, c'est-à-dire en une dimension, à partir des équations d'Euler, et d'une équation d'état cubique déterminée expérimentalement pour l'hélium 4. Il s'est avéré en particulier que des chocs se formaient beaucoup plus tôt qu'on ne s'y attendait a priori, et étaient présents dans la gamme de paramètres de l'expérience, bien qu'aucune signature expérimentale n'en ait pour l'instant été détectée.

Depuis peu, une nouvelle expérience permet la mesure directe de la densité focale en géométrie quasi-sphérique [4]. On peut ainsi comparer directement la pression mesurée à celle obtenue par simulation numérique, ce qui permet entre autres une calibration de l'amplitude d'oscillation de la céramique en fonction de la tension appliquée, et apporte également des indications sur la pertinence des hypothèses sous-jacentes à l'étude numérique. Une question intéressante se pose : les effets non-linéaires sont-ils moins forts en géométrie hémisphérique qu'en géometrie sphérique? C'est ce que semblent montrer les expériences. La différence réside essentiellement dans la non annulation du flux au point focal, mais les calculs numériques en géométrie hémi-sphérique seraient beaucoup plus difficiles car ils nécessiteraient un traitement en deux dimensions.

1 Introduction

La focalisation d'une onde sphérique a été largement étudiée dans un fluide polytropique, i.e. ayant une équation d'état de la forme $P\rho^{-\gamma} = cte(T)$. Ici, nous considérons le cas où le fluide a un point critique, de telle sorte que la compressibilité devient infinie pour une densité non nulle. Nous avons choisi l'exemple de l'hélium liquide. La motivation de cette étude provient d'une expérience réalisée dans l'hélium 4 superfluide à basse température en vue d'étudier la cavitation quantique [2]. Une céramique piézo-électrique hémi-sphérique produit une onde sonore, dont la focalisation entraine de fortes variations de pression au point focal. Nous avons calculé ces variations numériquement, par la résolution des équations d'Euler en géométrie sphérique unidimensionnelle.

Depuis peu, une variante de l'expérience précédente permet une mesure directe de la densité du liquide au point focal de la céramique, et donc une comparaison avec les résultats numériques. Nous allons dans un premier temps présenter l'expérience, puis la méthode numérique employée, enfin discuter les résultats obtenus.

◇ Paris Onze Éditions, Bât.338, Université de Paris-sud, 91405 Orsay

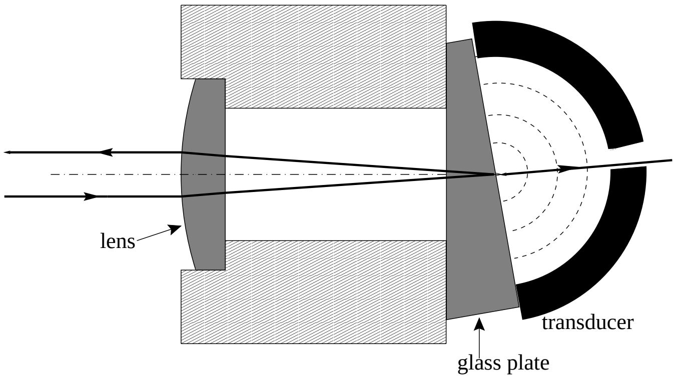

FIG. 1 – Dispositif expérimental

2 Dispositif expérimental

Une céramique piézo-électrique hémi-sphérique faite de plomb zirconium titanate, de rayon intérieur 8 mm et d'épaisseur 2 mm, est placée dans l'hélium liquide et excitée à la fréquence de résonance de son premier mode en épaisseur ($f = 1/T = 1019kHz$). La température est typiquement 100 mK. A cette température, l'hélium 4 est superfluide. On peut faire varier la pression statique initiale entre 0 et 25.3 bars (pression de solidification de l'hélium).

L'équation d'état de l'hélium 4 a été établie entre autres par Maris [5] et s'écrit sous forme adimensionnée

$$\tilde{P} - \frac{P_{sp}}{\rho_{sp} c_{s0}^2} = \frac{\mathcal{C}_o^2}{3}(\tilde{\rho} - 1)^3 \tag{1}$$

où $C_o \simeq 3.553$ et $\tilde{P}$ et $\tilde{\rho}$ sont la pression et la densité adimensionnés respectivement par $\rho_{sp} c_{s0}^2$ et par ρ_{sp}. La densité spinodale vaut $\rho_{sp} \simeq 0.0948$ g.cm^{-3}, la pression spinodale $P_{sp} \simeq -9.62$ bars à T=0. A $P = 0$, la densité est $\rho_0 = 0.14513$ g.cm^{-3}, la vitesse du son $c_{s0} = 238.3$ m.s^{-1} et la longueur d'onde $\lambda_0 = c_{s0}/f = 0.238$ mm.

Dans la nouvelle expérience montée par X. Chavanne et al [4], une plaque en verre est placée contre la céramique, de façon à fermer le volume intérieur de la demi sphère (cf figure 1). Un rayon laser est dirigé sur le point focal à travers la plaque en verre. La mesure du coefficient de réflexion de la lumière sur l'interface verre-hélium donne une mesure directe de l'indice de réfraction de l'hélium en ce point, et donc de la densité.

3 Simulations numériques des équations d'Euler

On se place en géométrie sphérique 1D, c'est à dire que la demi-sphère est remplacée par une sphère complète. Cette approximation se justifie d'autant mieux avec la nouvelle configuration expérimentale, pour laquelle une plaque est accolée à la céramique, et réfléchit l'onde incidente sur sa surface.

Aux températures employées, la dissipation visqueuse et la diffusion de la chaleur peuvent être négligées. C'est pourquoi nous avons employé les équations d'Euler pour décrire le comportement de l'hélium

$$\partial_t \rho + u \partial_r \rho + \rho \partial_r u \quad = \quad \frac{-\theta \rho u}{r}$$

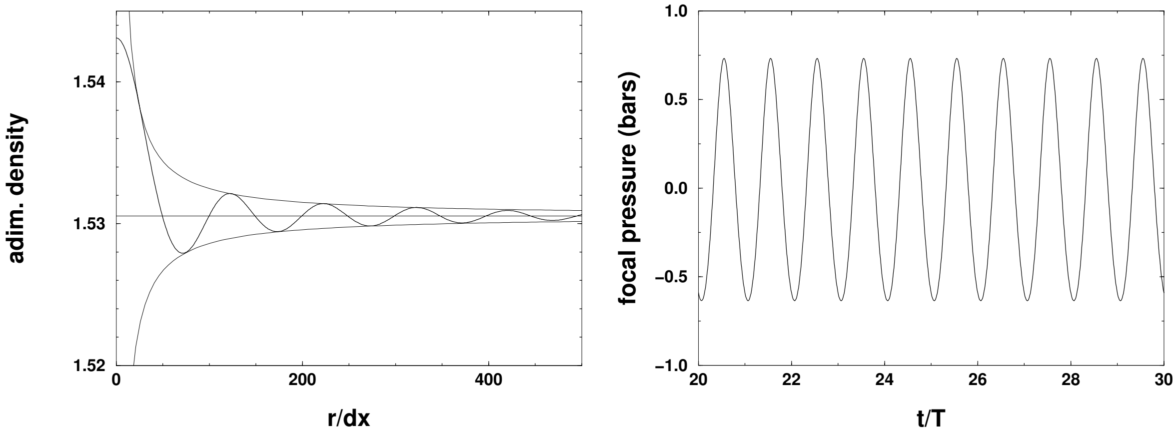

FIG. 2 – Profil de densité (gauche) et pression focale en fonction du temps (droite) pour une amplitude d'oscillation $\Delta x_0 = 0.73$ nm. La ligne fine correspond à un fit de l'amplitude en $1/r$ et la ligne en tirets à un fit en $\sin(kr)/(kr)$, indistinguable du résultat de la simulation. La densité statique vaut $\rho = \rho_0 = 1.53\rho_{sp}$.

$$\partial_t u + u\partial_r u \quad = \quad -\frac{1}{\rho}\partial_r P, \tag{2}$$

où θ vaut respectivement 0, 1, et 2 en géométrie plane, cylindrique ou sphérique.

Ce choix paraît tout à fait raisonnable tant qu'il n'y a pas de chocs dans le système. Au delà, on pourrait discuter le rôle joué en particulier par la dispersion. Il est à noter que la différence d'échelle entre la longueur totale du système (8 mm) et la longueur d'onde des eventuelles oscillations résultant de la dispersion (quelques Angströms) rend impossible la simulation directe d'équations incluant de la dispersion. L'hypothèse simplificatrice que nous faisons en la négligeant rend d'autant plus importante la validation de notre méthode par comparaison avec l'expérience.

Il se forme en effet des chocs dans le système, pour la gamme d'amplitudes d'oscillations utilisées dans l'expérience. Un calcul basé sur la méthode des caractéristiques (toujours pour Euler 1D en géométrie sphérique) prédit que la distance entre le point focal et le point de formation du choc varie exponentiellement avec l'amplitude d'oscillation

$$r_{shock} \sim L_0 \exp\left[-\frac{c_{s0}^2}{2\ L_0\ \omega^2\ \Delta x_0}\ \frac{\rho_0 - 1}{\rho_0 - \frac{1}{2}}\right] > 0. \tag{3}$$

Pour la résolution numérique des équations d'Euler, nous avons dû choisir un schéma capable de capturer les chocs [6]. A faible amplitude, leur effet est cependant négligeable, et on trouve une solution linéaire (figure 2). Tous les résultats sont présentés après avoir atteint un régime permanent.

Peu à peu, les non-linéarités deviennent visibles (figure 3), et se traduisent en particulier par d'importants pics positifs de pression au point focal. On atteint ainsi des pressions extrêmement élevées, voire supérieures à la pression de solidification. Des phénomènes de solidification ont effectivement été mis en évidence expérimentalement, comme on le verra plus loin.

Si on augmente encore l'amplitude d'oscillation, les simulations montrent bien la formation de chocs qui se propagent vers le centre de la céramique (figure 4).

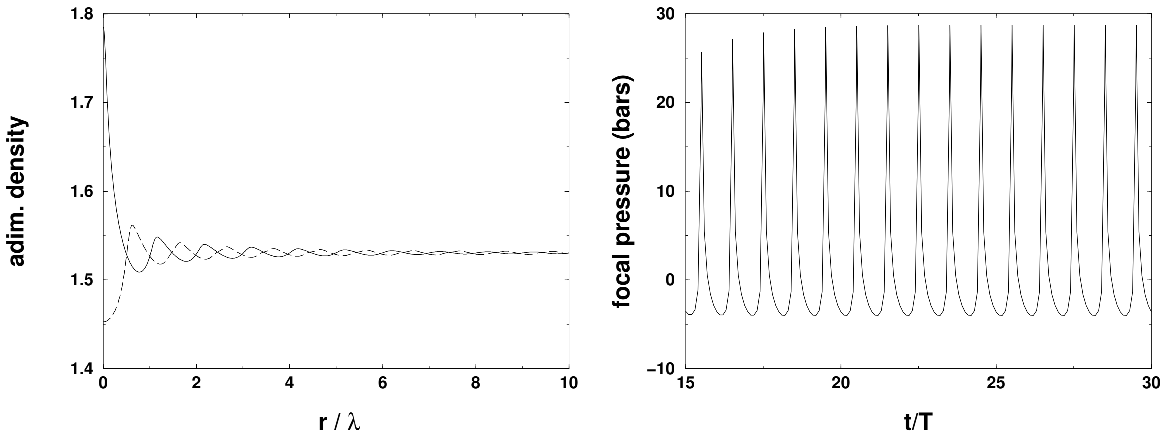

FIG. 3 – Profil de densité (gauche) et pression focale en fonction du temps (droite) pour une amplitude d'oscillation $\Delta x_0 = 7.3$ nm. Le profil de densité est présenté à deux instants différents de la période. La densité statique vaut $\rho = \rho_0$.

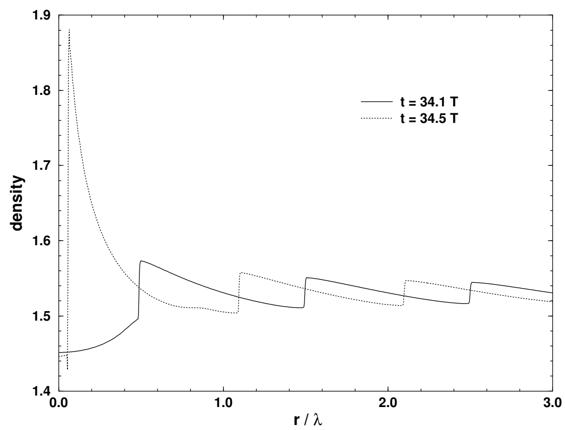

FIG. 4 – Profil de densité pour une amplitude d'oscillation $\Delta x_0 = 30$ nm, à deux instants différents de la période. La densité statique vaut $\rho = \rho_0 = 1.53\rho_{sp}$.

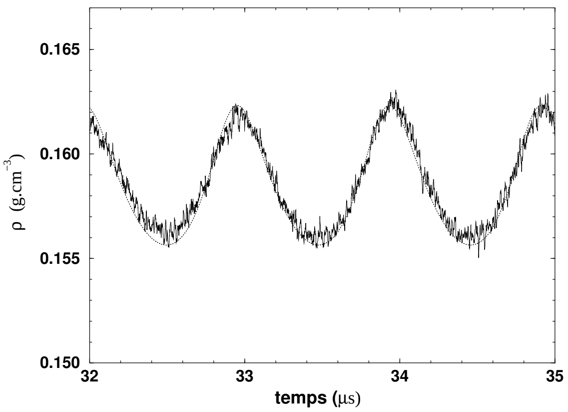

FIG. 5 – Densité au point focal respectivement pour une tension 8.89V appliquée à la céramique (expérience, ligne continue), et pour une amplitude $\Delta x_0 = 3nm$ (simulation, ligne en pointillés). La pression statique est de 9.8 bars.

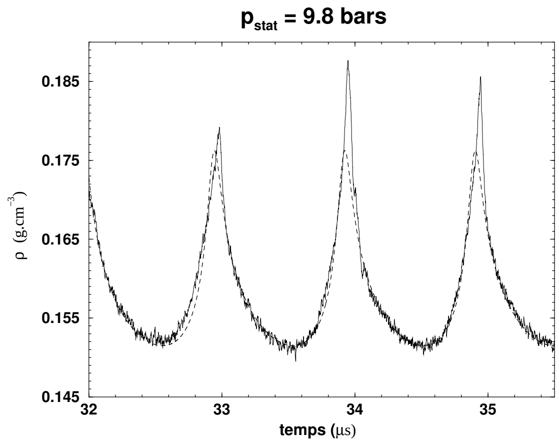

FIG. 6 – Densité au point focal respectivement pour une tension 30.06V appliquée à la céramique (expérience, ligne continue), et pour une amplitude $\Delta x_0 = 9nm$ (simulation, ligne en pointillés). La pression statique est de 9.8 bars.

4 Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux

Nous allons maintenant comparer les résultats numériques avec les mesures expérimentales. Ces dernières sont obtenues pour des trains d'onde de six oscillations. Pour les simulations (en régime permanent), nous choisissons l'amplitude d'oscillation qui s'ajuste au mieux sur l'oscillation maximale du signal expérimental. Il faudra évidemment inclure un facteur correctif pour comparer les amplitudes d'oscillations, connaissant le facteur de qualité de la céramique. La figure 5 présente un exemple d'ajustement, dans un cas de régime quasi-linéaire.

Sur la figure 6, obtenue pour une amplitude plus importante, on observe un bon accord sur la partie négative de l'oscillation. X. Chavanne et al [4] ont montré que l'hélium cristallise dans les maximas de l'onde dès que la densité dépasse le seuil 0.1758 $g.cm^{-3}$. Cette densité correspond à une surpression de 4.7 bars au dessus de la pression de solidification d'équilibre. Cette surpression est environ 1000 fois plus grande que ce qu'avaient observé toutes les expériences précédentes dans lesquelles on pense que des impuretés favorables au solide étaient présentes.

Nous avons réalisé des ajustements pour un grand nombre de pressions statiques et d'amplitudes d'oscillations. La figure 7 réunit les résultats et permet une assez bonne calibration de l'amplitude d'oscillation de la céramique, puisque la loi trouvée est linéaire, avec une pente 0.30 ± 0.01 nm/V. Les points pour lesquels il y a eu solidification ne se distinguent pas des autres. En fait, il semble que la solidification ne modifie que la forme du pic positif, mais pas celle de l'excursion négative. Ainsi, un fit du minimum par les simulations n'est pas sensible à la présence de la solidification.

5 Conclusion

La focalisation d'une onde sphérique dans un liquide dont la compressibilité varie fortement avec la pression met en jeu d'importants effets non-linéaires. Ceux-ci ont pu être quantifiés grâce à des simulations numériques basées sur les équations d'Euler en géométrie sphérique. La comparaison avec l'expérience donne des bons résultats. Cette validation de la méthode numérique est particulièrement intéressante en vue d'une exploration future

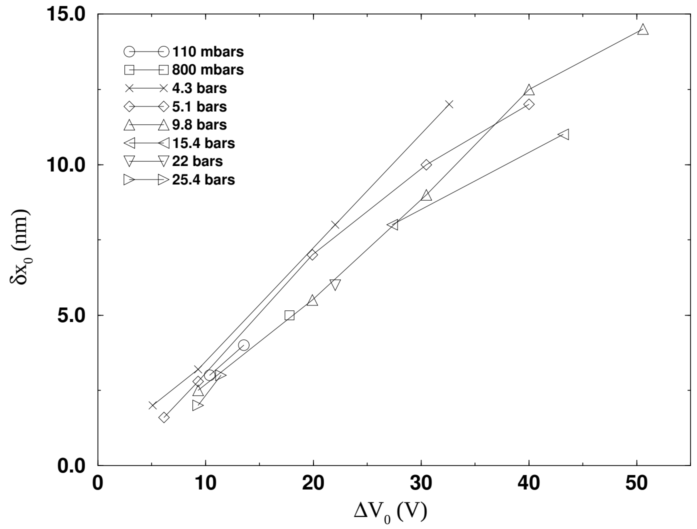

FIG. 7 – Tension expérimentale en fonction de l'amplitude d'oscillation utilisée pour la simulation numérique. Chaque point correspond à la comparaison d'une mesure expérimentale et d'une simulation.

des pressions négatives. Les mesures expérimentales du seuil de densité auquel la cavitation a lieu montrent en effet que la la nucléation des bulles est sensiblement modifiée par la présence de la paroi de verre. Cette nouvelle étude se poursuit.

Il est à noter cependant que lorqu'on enlève la plaque de verre, le flux de matière n'est plus nul au point focal. Des effets de diffraction peuvent également rentrer en jeu. Les résultats expérimentaux semblent indiquer une forte réduction des effets non-linéaires [3]. Pour étudier cela numériquement, il serait nécessaire de mettre en place des simulations à deux dimensions qui bien sûr seront beaucoup plus difficiles à effectuer.

Références

[1] C.Appert, S. Balibar, X. Chavanne, D. d'Humières, and Ch. Tenaud. Nonlinear effects in the focussing of an acoustic wave in helium 4 and 3. *en préparation*, 2001.

[2] H. Lambaré, P. Roche, S. Balibar, H.J. Maris, O.A. Andreeva, C. Guthman, K.O. Keshishev, and E. Rolley. Cavitation in superfluid Helium-4 at low temperature. *the European Physical Journal B*, 2:381–391, 1998.

[3] F. Caupin and S. Balibar. Measurement of the cavitation pressure in helium. *submitted to Phys. Rev. B*, 2001.

[4] X. Chavanne, S. Balibar, and F. Caupin. Acoustic crystallization and heterogeneous nucleation. *submitted to PRL*, 2001.

[5] H.J. Maris. Critical phenomena in 3He and 4He at T = 0K. *Phys. Rev. Lett.*, 66:45, 1991.

[6] C. Tenaud, E. Garnier, and P. Sagaut. Evaluation of some high-order shock-capturing schemes for Direct Numerical Simulation of unsteady 2D free flows. *accepted Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 1999.